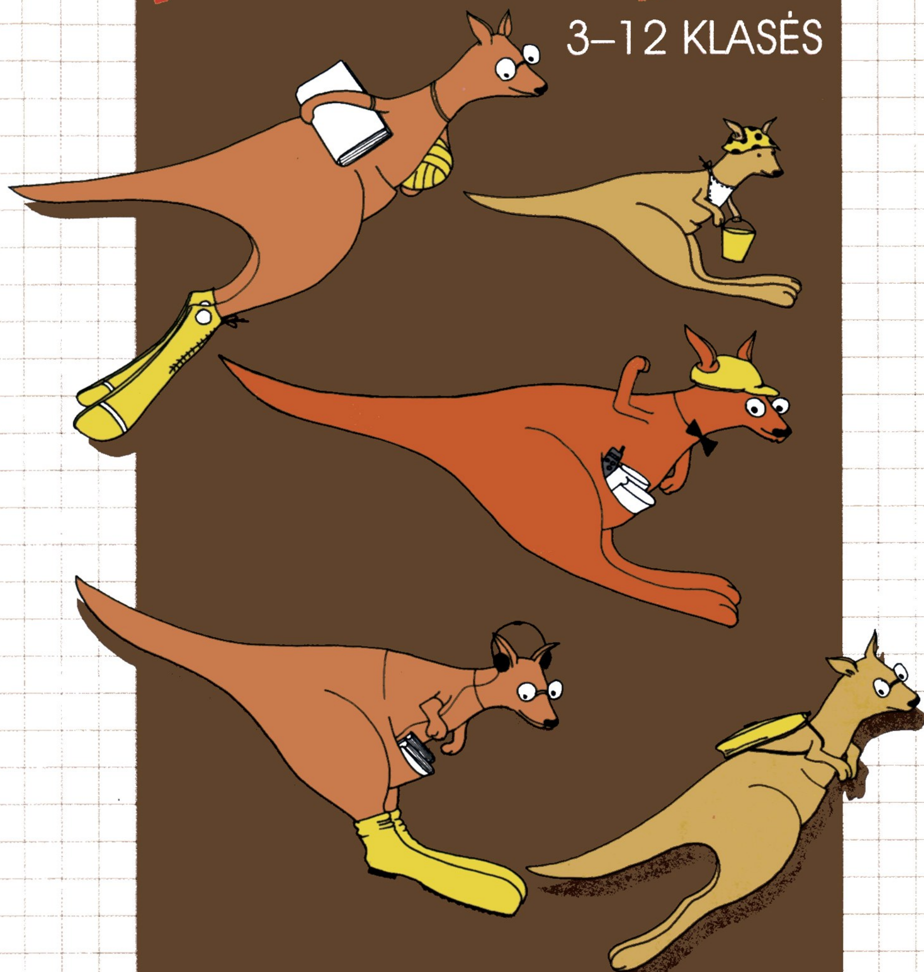
KENGŪRA 2003



3–12 KLASĖS

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS
KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

КЕНГУРУ 2003
KANGUR 2003
KANGAROO 2003

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS

KENGŪRA 2003

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS K O N K U R S O UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Sudarė JUOZAS MAČYS

TEV

VILNIUS 2003

Darbo vadovas *Valdas Vanagas*

Programinė įranga: *Rolandas Jakštys*

Kompiuterinė grafika: *Inga Paukštienė*, *Edita Tatarinavičiūtė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Laimutė Ališauskienė*, *Nijolė Drazdauskienė*, *Aldona Žalienė*

Konsultantai: *Marytė Stričkienė*, *Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV interneto svetainė http://www.tev.lt

ISBN 9955-491-56-6

TURINYS

PRATARMĖ

Populiariausios moksleivių matematikos varžybos yra tarptautinis *Kengūros* žaidimas-konkursas. Sumanytas Australijoje, jis bematant išplito Europoje. 1994 metais buvo įkurta asociacija „Kengūra be sienų“ (*Kangourou sans frontières*), kuriai dabar priklauso 30 šalių iš Europos ir Amerikos. 2003 metais konkurse jau varžėsi apie 3 milijonus moksleivių, o į Gineso rekordų knygą jis jau seniai įrašytas kaip masiškiausias.

Lietuvoje *Kengūros* konkursą rengia organizavimo komitetas, į kurį įeina Švietimo ir mokslo ministerijos, Matematikos ir informatikos instituto, Vilniaus universiteto ir mokyklų atstovai. Kaip konkursas vyksta, pasakojama matematikos ir informatikos žurnale „Alfa plius omega“, 2000, Nr. 1, kurį galima rasti mokyklų bibliotekose.

Kad mokiniai galėtų geriau pasirengti konkursams, organizavimo komiteto bei Matematikos ir informatikos instituto rūpesčiu nuo 1999 metų kasmet leidykloje TEV yra išleidžiamos konkurso užduočių ir sprendimų knygelės. Be to, leidykla TEV, bendradarbiaudama su Torunės (Lenkija) M. Koperniko universitetu ir leidykla „Aksjomat“, pradėjo leisti ankstesnių metų (kai Lietuva konkurse dar nedalyvavo) konkursų užduočių knygeles. Pirmoji serijos knygelė „Kengūra 1993–1998. Mažylis“ šiemet jau išėjo iš spaudos, baigiama rengti ir „Bičiulio“ knygelė. Beje, leidykloje jau rengiami ir kompiuteriniai *Kengūros* konkursų variantai.

Lietuvoje, kaip ir daugumoje kitų šalių, 2003 metų konkursas įvyko kovo 20 dieną (sutinkamai su nustatyta formule — kovo trečią ketvirtadienį). Konkurse dalyvavo 54 816 moksleivių iš 1152 Lietuvos mokyklų. Visiems konkurse dalyvavusiems moksleiviams buvo įteikti gražūs konkurso organizavimo komiteto padėkos pažymėjimai. Kiekvienas mokinys atminimui gavo suvenyrinį *Kengūros* pieštuką ir konkurso užduočių lapelį.

Geriausiai uždavinius išsprendę mažyliai ir bičiuliai gegužės mėnesio pabaigoje dalyvavo papildomame konkurse išaiškinti pačius stipriausius, kuris tradiciškai vyksta Vilniuje, Matematikos ir informatikos institute. Stipriausieji mažyliai ir bičiuliai taip pat buvo pakviesti dalyvauti Šiaulių ir Vilniaus universitetų organizuotose Lietuvos jaunesniųjų klasių olimpiadose. Dešimt geriausiai konkurse pasirodžiusių juniorų kartu su dar penkiais lenkų mokyklų moksleiviais liepą vyko į tarptautinę kengūrininkų stovyklą Zakopanėje (Lenkija), kur laimėjo daugybę prizų tiek matematikos, tiek sportinėse varžybose. Būrys mūsų geriausiųjų kadetų birželio mėnesį ilsėjosi ir treniravosi Karklėje prie Baltijos jūros. Penki įvairių grupių atstovai sudarė Lietuvos komandą, kuri liepos mėnesį dalyvavo trečiajame *Kengūros* komandiniame čempionate Rumunijos kalnų kurorte Poiana Pinului ir puikiai ten pasirodė — iškovojo antrąją vietą. Mūsų vyriausiųjų septynetukas dalyvavo stovykloje Minske, kur treniravosi kartu su baltarusių komanda. Liepos mėnesį būrelis juniorų važiavo į Ukrainos *Kengūros* stovyklą Kryme. Bet svarbiausia ir naũja buvo tarptautinė *Kengūros* stovykla Molėtų rajone, kurioje, be Lietuvos, dalyvavo Austrijos, Baltarusijos, Lenkijos, Ukrainos, Rumunijos moksleiviai. Darbo organizuojant stovyklą buvo per akis, bet stovykla patiko ir matematikos, ir sporto, ir turizmo mėgėjams — užsienio komandos iš anksto pradėjo užsisakinėti vietas kitiems metams.

Visi kiti sėkmingai pasirodę dalyviai išsidalijo gausybę prizų — knygų ir specialių *Kengūros* dovanų.

O *Kengūra* jau ruošiasi naujiems turnyrams. Kartą metuose *Kengūros* asociacijos šalių atstovai susirenka į visuotinį suvažiavimą. 2003 metais toks suvažiavimas įvyko Paryžiuje

(Prancūzija) lapkričio 5–10 dienomis. Jame buvo apsvarstytos užduotys, siūlomos 2004 metų konkursui. Prieš suvažiavimą iš įvairių šalių atsiųsti uždaviniai buvo atitinkamai suskirstyti į 5 grupes ir sudėti į storą knygą. Tokį rinkinį gavo kiekvienos šalies atstovai. Iš viso sąrašo balsuojant buvo sudarytos rekomenduojamos užduotys (kaip įprasta, mažylių grupei — 24 klausimai, kitoms grupėms — po 30 klausimų). Po to užduotys buvo tikslinamos, redaguojamos, tad išvažiuodama kiekviena šalis turėjo angliškai parengtą preliminarų užduočių rinkinį (beje, be sprendimų). Vis dėlto reikia pasakyti, kad galutinės užduotys gali gerokai skirtis nuo rekomenduojamųjų — kiekviena šalis turi teisę užduotyse keisti ką tik nori.

Konkurso metu negalima naudotis skaičiuokliais. Konkursas testinis — tai reiškia, kad tik vienas atsakymas iš 5 pateiktų yra teisingas, ir jūs turite tą atsakymą nustatyti. Gautą atsakymą dalyvis nurodo savo kortelėje. Jeigu jūs beveik neabejojate atsakymu, tai geriausia pasirašyti sau tą atsakymą, pasižymėti jį, sakykime, klaustuku, ir grįžti prie jo tik tada, jei liktų laiko (beje, jo greičiausiai neliks). Todėl konkursui ir reikia ruoštis specialiai, ne kaip egzaminui ar olimpiadai: čia įrodinėti nieko nereikia. Dėl šios priežasties konkursas yra labai demokratiškas — sakysime, labai geras, bet lėtas olimpiadininkas gali parodyti blogesnį rezultatą negu pritingintis, bet greitos orientacijos mokinys.

Vertinant darbus, už teisingą atsakymą duodamas prieš uždavinį nurodytas taškų skaičius, už nenurodytą atsakymą — 0 taškų, už neteisingą atsakymą atimama 25% uždaviniui skiriamų taškų. Kad nebūtų neigiamų rezultatų, kiekvienam dalyviui iš karto duodama 30 taškų (mažyliams — 24 taškai). Vadinasi, teoriškai dalyvis gali gauti nuo 0 iki 150 taškų (mažyliai — nuo 0 iki 120 taškų).

Šioje knygelėje pateiktos 2003 m. *Kengūros* konkurso užduotys ir jų sprendimai. Kad mokinys galėtų pasitreniruoti ir pasitikrinti, knygelės gale yra duota visų užduočių teisingų atsakymų lentelė. Mokinys galėtų daryti taip: pasiimti iš pradžių, pavyzdžiui, žemesnės klasės testą ir atlikti jį per 75 minutes. Po to jis gali pasitikrinti atsakymus ir spręsti apie savo galimybes. Lygiai tą patį jis gali atlikti su savo ar vyresnės klasės testu — dauguma vyresniųjų klasių užduočių taip pat prieinamos jaunesniems mokiniams.

Knygelėje pateikti visų uždavinių detalūs sprendimai, ir pasitreniravus galima juos tiesiog skaityti. Kad būtų patogiau, sprendimų dalyje po uždavinio numerio iš karto nurodoma, kuris atsakymas teisingas.

? Ženklu ? pažymėtas „spėjimas“. Žinoma, dažniausiai tas spėjimas yra beveik sprendimas, tik spėjime visą laiką remiamasi tuo, kad teisingas yra vienintelis iš penkių siūlomų pasirinkti atsakymų. Todėl atspėjus atsakymą ir pasitikrinus, kad jis tinka, nieko daugiau daryti nebereikia. Kai spėti atsakymą beprasmiška, spėjimas iš viso neduodamas ir iš karto pereinama prie sprendimo. Dar kartą pabrėžiame — rengiantis *Kengūros* konkursui visiškai pakanka pabandyti savarankiškai paspręsti uždavinius ir paskaityti klaustuko ženklu pažymėtus spėjimus ar trumpą sprendimą. Keliais klaustukais žymimi kiti spėjimo būdai.

! Ženklu ! žymimas griežtas sprendimas. Suprantama, perskaityti sprendimą labai naudinga: čia įrodoma, kad kiti atsakymai netinka, mokoma logiškai samprotauti. Tai visada pravers laikant egzaminus ar dalyvaujant olimpiadose. Beje, būtent *Kengūros* konkursui sugalvojama daugybė naujų gražių uždavinių. Po to tuos uždavinius galima atpažinti visur — olimpiadose, valstybinių egzaminų užduotyse ir vadovėliuose.

!! Ženklu !! žymimas kitas sprendimas, dažnai trumpesnis, bet reikalaujantis daugiau žinių. Keliais šauktukais taip pat žymimos pastabos, siūlomi sunkesni panašūs uždaviniai, komentarai mokytojui ir kt.

Kiek daug gali skirtis uždavinio atsakymo spėjimas (pakankamas dalyvaujant konkurse) ir to uždavinio griežtas sprendimas, labai gerai matyti, pavyzdžiui, iš uždavinio S30 (žr. jo sprendimą 64 psl.). Atspėti atsakymą čia paprasta, o griežtai išspręsti uždavinį — sunku. Stengiantis padėti pasirengti konkursui rusų, lenkų ir anglų mokyklų moksleiviams, į knygelę taip pat įdėtos 2003 m. užduotys jų kalbomis. Tai ypač svarbu žemesniųjų klasių moksleiviams, kuriems skaityti matematinį tekstą lietuviškai sunku. Ta proga galima prisiminti, kad Pasaulio matematikos olimpiadoje IMO visi moksleiviai gauna sąlygas ir rašo sprendimus gimtąja kalba.

Nuoširdžiai dėkojame:

- visiems dalyviams bei konkurso organizatoriams miestuose, rajonuose ir mokyklose, pasistengusiems, kad konkursas vyktų sklandžiai;
- Matematikos ir informatikos institutui, padėjusiam rengti konkursą, Viešajai įstaigai „Visorių informacinių technologijų parkas“, nuveikusiai didžiumą organizacinių darbų, ir leidyklai TEV, visokeriopai rėmusiai konkursą;
- Švietimo ir mokslo ministerijai, glaudžiai bendradarbiavusiai su organizavimo komitetu ir palaikiusiai nuolatinį ryšį su mokyklomis.

2004 metų konkursas įvyks kovo 18 dieną, o sąlygos vėl bus parengtos lietuvių, lenkų, rusų ir anglų kalbomis.

Daugiau informacijos rasite internete: http://www.kengura.lt, http://www.tev.lt.

Visais iškilusiais klausimais prašom kreiptis į organizavimo komitetą — tel.: (8-5) 2729318, el. paštas: info@kengura.lt, tev@tev.lt, adresas: Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2021 Vilnius.

Sėkmės rengiantis konkursui! Kviečiame gausiai dalyvauti!

Organizavimo komitetas

2003 m. konkurso užduočių sąlygos

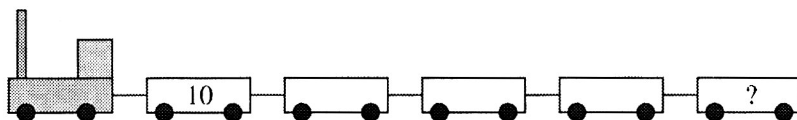
MAŽYLIS (III ir IV klasės)



KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

M1. Kam lygu $0 + 1 + 2 + 3 + 4 - 3 - 2 - 1 - 0$?
A 0 **B** 2 **C** 4 **D** 10 **E** 16

M2. Pirmame vagone yra 10 dėžių. Kiekviename tolesniame vagone yra dvigubai daugiau dėžių nei ankstesniame. Kiek dėžių yra penktame vagone?



A 100 **B** 120 **C** 140 **D** 160 **E** 180

M3. Zita piešia gėlytes: iš pradžių mėlyną, po to žalią, tada raudoną, po jos juodą, pagaliau geltoną, tada vėl mėlyną, žalią, raudoną ir t. t. Kokios spalvos bus 17-toji gėlytė?
A Mėlyna **B** Žalia **C** Raudona **D** Juoda **E** Geltona

M4. Mokytojų kambaryje yra 6 keturviečiai staliukai, 4 dviviečiai staliukai ir 3 šešiaviečiai staliukai. Kiek vietų prie staliukų yra mokytojų kambaryje?
A 40 **B** 25 **C** 50 **D** 36 **E** 44

M5. Ant stalo guli moneta. Kiek daugiausiai tokių pat monetų galima padėti ant stalo, kad jos liestų pirmąją?
A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

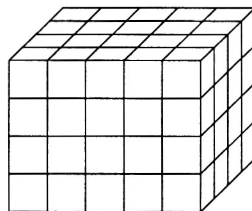
M6. Paveikslėlyje atstumai $KM = 10$, $LN = 15$, $KN = 22$. Kam lygus atstumas LM?



A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

M7. Ežiukas Ukas skundžiasi savo draugams: „Jeigu aš būčiau paėmęs obuolių dvigubai daugiau negu paėmiau, tai turėčiau 24 obuoliais daugiau negu turiu dabar“. Kiek gi obuolių paėmė Ukas?
A 48 **B** 24 **C** 42 **D** 12 **E** 36

M8. Kristupas iš to paties dydžio raudonų ir mėlynų kubelių sukonstravo pavaizduotą stačiakampį gretasienį. Visos išorinės jo sienos raudonos, o visi vidiniai kubeliai mėlyni. Kelių mėlynų kubelių prireikė Kristupui?
A 12 **B** 24 **C** 36 **D** 40 **E** 48



KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

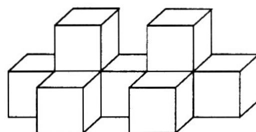
M9. Stačiakampis 4×7 nubrėžtas languotame popieriuje, kurio langelis yra 1×1. Kiek langelių kerta stačiakampio įstrižainė?
A 8 **B** 9 **C** 10 **D** 11 **E** 12

M10. Pavaizduota lentelė rodo įvairių gėlių rūšių skaičių botanikos sode. Iš sodininko Tadas sužinojo, kad sode yra 35 rūšys azalijų, 50 rūšių vilkdalgių ir 85 rūšys rožių. Kiek rūšių gerberų yra botanikos sode?
A 95 **B** 100 **C** 105 **D** 110 **E** 115

Azalijos	
Vilkdalgiai	
Rožės	
Gerberos	

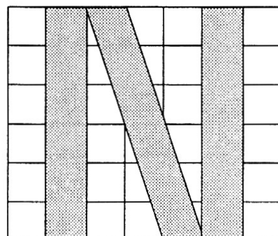
M11. Onutė užmigo 9:30 vakaro, o kitą rytą pabudo 6:45. Jos broliukas Martynas miegojo 1 h 50 min ilgiau. Kiek laiko miegojo Martynas?
A 30 h 5 min **B** 11 h 35 min **C** 11 h 5 min **D** 9 h 5 min **E** 8 h 35 min

M12. Pavaizduotas kubelių statinys sveria 189 g. Kiek gramų sveria vienas kubelis?
A 29 **B** 25 **C** 21 **D** 19 **E** 17



M13. Kengūriukas Sprindis rengėsi žvėrių olimpiadai, ir geriausias jo rezultatas šuolyje į tolį buvo 50 dm 50 cm 50 mm. Olimpiadą jis laimėjo pagerinęs savo rezultatą 123 cm. Koks buvo Sprindžio pergalingas šuolis?
A 6 m 78 cm **B** 5 m 73 cm **C** 5 m 55 cm **D** 11 m 28 cm **E** 7 m 23 cm

M14. Paveikslėlyje kvadratėlio plotas lygus 1. Kokį plotą paveikslėlyje užima raidė N?
A 15 **B** 16 **C** 17 **D** 18 **E** 19



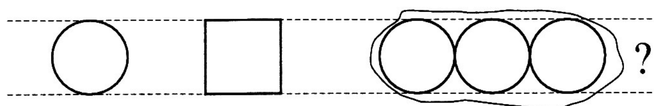
M15. Birutė dažnai nejučia sudeda skaitmenis, kuriuos ji mato savo elektroniniame laikrodyje (pavyzdžiui, jeigu laikrodis rodo 21:37, tai Birutė gauna sumą $2 + 1 + 3 + 7 = 13$). Kokią didžiausią sumą ji gali gauti?
A 24 **B** 36 **C** 19 **D** 25 **E** 23

M16. Klasėje yra 29 mokiniai. 12 mokinių turi seserį, o 18 mokinių turi brolį. Klasėje tik Tadas, Bartas ir Onutė neturi nei brolio, nei sesers. Keli mokiniai turi ir brolį, ir seserį?
A Nė vienas **B** 1 **C** 3 **D** 4 **E** 6

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

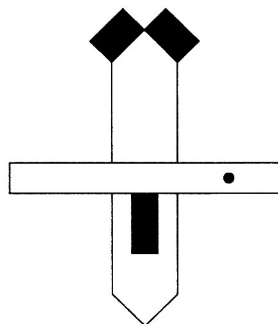
M17. Jurgiui buvo pavesta nupirkti kamuolių varžyboms. Jeigu jis būtų pirkęs 5 kamuolius, tai jam dar būtų likę 10 litų, o jeigu jis būtų užsigeidęs nupirkti 7 kamuolius, tai jam būtų tekę pasiskolinti 22 litus. Kiek litų kainavo vienas kamuolys, jeigu jo kaina išreiškiama sveikuoju litų skaičiumi?
A 11 **B** 16 **C** 22 **D** 26 **E** 32

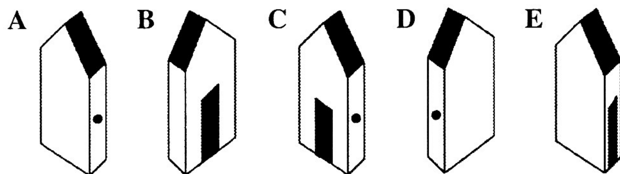
M18. Aš apjuosiau medinį skritulį (žr. paveikslėlį) — man užteko a cm siūlo. Aš apjuosiau medinį kvadratą — man užteko b cm siūlo.



Kiek centimetrų siūlo man užteks apjuosti tris skritulius jų nejudinant?
A $3a$ **B** $2a+b$ **C** $a+2b$ **D** $3b$ **E** $a+b$

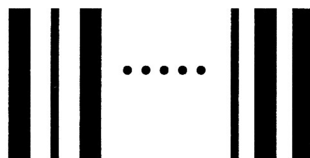
M19. Paveikslėlis dešinėje buvo perpieštas ant popieriaus lapo, o iškirpus išlankstytas namelis. Kuris?





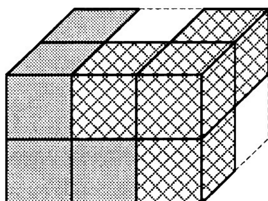
M20. Kengūrėlė pirko saldainių — didelių, vidutinių ir mažų. Didieji kainavo po 4 pinigėlius, vidutiniai — po 2 pinigėlius, o mažieji — po 1 pinigėlį. Kengūrėlė nusipirko 10 saldainių ir užmokėjo 16 pinigėlių. Kiek ji pirko didžiųjų saldainių?
A 5 **B** 4 **C** 3 **D** 2 **E** 1

M21. Tam tikrą brūkšninį kodą sudaro 17 juodų ir baltų juostelių, kurios eina pakaitomis (pirma ir paskutinė juostelės — juodos). Juodosios juostelės yra dvejopos — plačios ir siauros. Baltųjų juostelių yra trimis daugiau negu plačiųjų juodų juostelių. Kiek yra siaurųjų juodų juostelių?



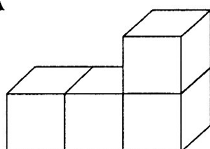
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

M22. Marius sudėjo stačiakampį gretasienį iš 3 skirtingai išmargintų detalių, kurių kiekviena suklijuota iš 4 kubelių. Po to vieną detalę jis išėmė (žr. paveikslėlį).

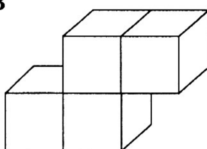


Kurią?

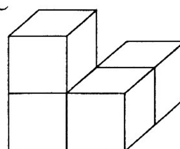
A



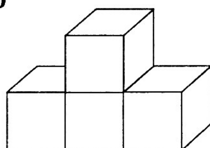
B



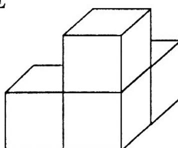
C



D

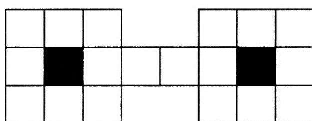


E



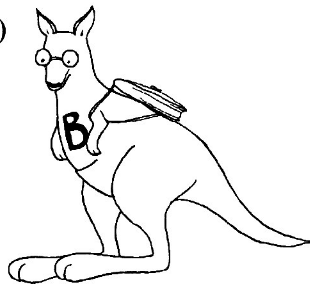
M23. Žaislų parduotuvėje šuniukas ir trys meškiukai kainuoja tiek pat, kiek ir keturios kengūrėlės. Trys šuniukai ir du meškiukai taip pat kainuoja kiek ir keturios kengūrėlės. Kas ir kiek kartų kainuoja brangiau — šuniukas ar meškiukas?
A Šuniukas dukart brangesnis už meškiuką
B Meškiukas dukart brangesnis už šuniuką
C Meškiukas ir šuniukas kainuoja vienodai
D Meškiukas triskart brangesnis už šuniuką
E Šuniukas triskart brangesnis už meškiuką

M24. Pavaizduota lenta sudaryta iš 20 langelių 1×1. Keliais būdais galima uždengti jos 18 baltųjų langelių devyniais stačiakampiais kauliukais 1×2?



(Lentos sukioti negalima. Du būdai laikomi skirtingais, jeigu bent vienas kauliukas padėtas kitaip.)
A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 16

BIČIULIS (V ir VI klasės)

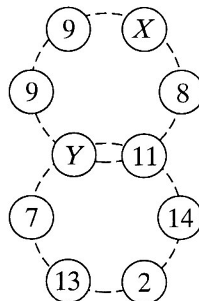


KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

B1. Kurio iš žemiau pateiktų reiškinių reikšmė didžiausia?
A $2+0+0+3$ **B** $2\times0\times0\times3$ **C** $(2+0)\times(0+3)$ **D** $20\times0\times3$
E $(2\times0)+(0\times3)$

B2. Zita piešia gėlytes: iš pradžių mėlyną, po to žalią, tada raudoną, po jos juodą, pagaliau geltoną, tada vėl mėlyną, žalią, raudoną ir t. t. Kokios spalvos bus 17-toji gėlytė?
A Mėlyna **B** Žalia **C** Raudona **D** Juoda **E** Geltona

B3. Kiek sveikųjų skaičių yra tarp skaičių 2,09 ir 15,3?
A 13 **B** 14 **C** 11 **D** 12 **E** Be galo daug

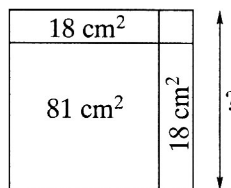


B4. Koks yra mažiausias natūralusis skaičius, kuris dalijasi ir iš 2, ir iš 3, ir iš 4?
A 1 **B** 6 **C** 12 **D** 24 **E** 36

B5. Suma skaičių, esančių kiekviename iš pavaizduotų ratų, lygi 55. Kam lygus skaičius X?
A 9 **B** 10 **C** 13 **D** 16 **E** 18

B6. Tomas turi 9 šimto litų banknotus, 9 dešimties litų banknotus ir 10 monetų po 1 litą. Kiek litų turi Tomas?
A 1 000 **B** 991 **C** 9 910 **D** 9 901 **E** 99 010

B7. Paveikslėlyje pavaizduotas kvadratas, kurį sudaro mažesnis 81 cm² ploto kvadratas, du stačiakampiai 18 cm² ploto kiekvienas ir mažas kvadratėlis. Kam lygi didžiojo kvadrato kraštinė (centimetrais)?
A 9 **B** 2 **C** 7 **D** 11 **E** 10



B8. Birutė dažnai nejučia sudeda skaitmenis, kuriuos ji mato savo elektroniniame laikrodyje (pavyzdžiui, jeigu laikrodis rodo 21:37, tai Birutė gauna sumą $2+1+3+7=13$). Kokią didžiausią sumą ji gali gauti?
A 24 **B** 36 **C** 19 **D** 25 **E** 23

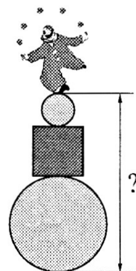
B9. Paveikslėlyje atstumai $KM=10$, $LN=15$, $KN=22$. Raskite atstumą LM.
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5



B10. Skaičius 24 turi aštuonis daliklius: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 ir 24. Koks yra pats mažiausias skaičius, turintis keturis daliklius?
A 4 **B** 6 **C** 8 **D** 9 **E** 10

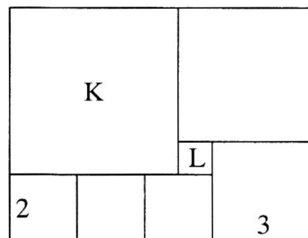
KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

B11. Paveikslėlyje pavaizduotas klounas Pilypas, stovintis ant dviejų sviedinių ir kubo. Apatinio sviedinio spindulys yra 6 dm, o viršutinio sviedinio spindulys triskart mažesnis. Kubo briauna yra 4 decimetrais ilgesnė negu viršutinio sviedinio spindulys. Kaip aukštai (decimetrais) stovi klounas Pilypas?
A 14 **B** 20 **C** 22 **D** 24 **E** 28

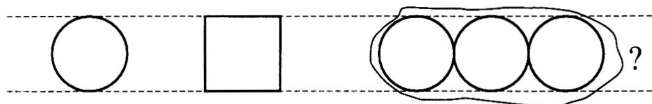


B12. Pasirenkame du skirtingus skaičius iš 1, 2, 3, 4, 5 ir juos sudedame. Kiek skirtingų sumų taip galime gauti?
A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 8 **E** 9

B13. Paveikslėlyje pavaizduotą stačiakampį sudaro 7 kvadratai, ir keleto iš jų kraštinių ilgis nurodytas. Kvadrato K plotas didžiausias, kvadrato L — mažiausias. Kelis kartus kvadrato K plotas didesnis už kvadrato L plotą?
A 16 **B** 25 **C** 36 **D** 49 **E** Nustatyti neįmanoma



B14. Aš apjuosiau medinį skritulį (žr. paveikslėlį) — man užteko a cm siūlo. Aš apjuosiau medinį kvadratą — man užteko b cm siūlo.

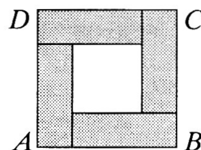


Kiek centimetrų siūlo man užteks apjuosti tris skritulius jų nejudinant?
A $3a$ **B** $2a + b$ **C** $a + 2b$ **D** $3b$ **E** $a + b$

B15. Ieva turi 20 kamuoliukų — geltonų, žalių, mėlynų ir juodų. Iš tų kamuoliukų 17 — ne žali, 5 — juodi, 12 — ne geltoni. Kiek Ieva turi mėlynų kamuoliukų?
A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 8 **E** 15

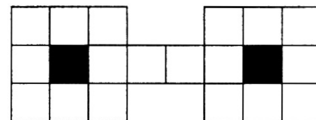
B16. Jonas vaikšto į mokyklą keliuku, kurio vienoje pusėje auga 17 medžių. Vieną dieną Jonas žymėjo juos kreida. Eidamas į mokyklą, jis pažymėjo pirmą medį, po to kas antrą. Grįždamas iš mokyklos, jis vėl pažymėjo pirmą medį, o tada žymėjo kas trečią. Kiek medžių liko nepažymėtų?
A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

B17. Kvadratas $ABCD$ susideda iš balto vidinio kvadrato ir keturių vienodų užtušuotų stačiakampių. Kiekvieno stačiakampio perimetras lygus 40 cm. Kam lygus kvadrato $ABCD$ plotas (cm^2)?
A 400 **B** 200 **C** 160 **D** 100 **E** 80

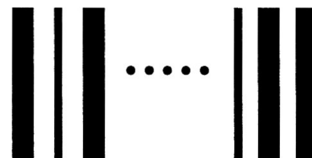


B18. Šiandienos datą žymime taip: 2003-03-20. Kaip žymėsime datą, kai nuo šios dienos 20:03 valandos praeis 2003 minutės?
A 2003-03-21 **B** 2003-03-22 **C** 2003-03-23 **D** 2003-04-21 **E** 2003-04-22

B19. Pavaizduota lenta sudaryta iš 20 langelių 1×1. Keliais būdais galima uždengti jos 18 baltųjų langelių devyniais stačiakampiais kauliukais 1×2? (Lentos sukioti negalima. Du būdai laikomi skirtingais, jeigu bent vienas kauliukas padėtas kitaip.)
A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 16

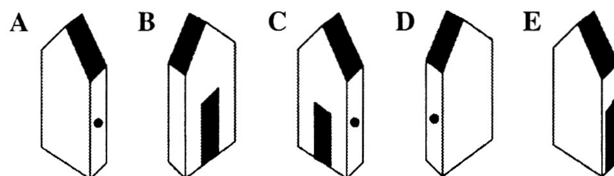


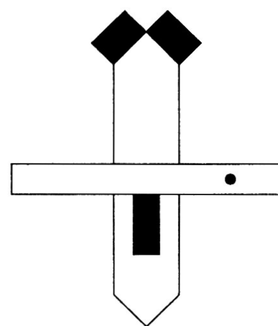
B20. Tam tikrą brūkšninį kodą sudaro 17 juodų ir baltų juostelių, kurios eina pakaitomis (pirma ir paskutinė juostelės — juodos). Juodosios juostelės yra dvejopos — plačios ir siauros. Baltųjų juostelių yra trimis daugiau negu plačiųjų juodų juostelių. Kiek yra siaurųjų juodų juostelių?
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5



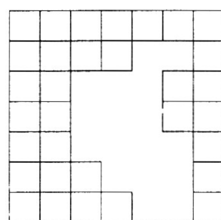
KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

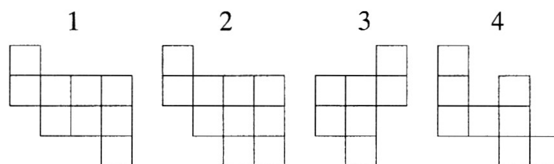
B21. Paveikslėlis dešinėje buvo perpieštas ant popieriaus lapo, o iškirpus išlankstytas namelis. Kuris?





B22. Iš sąsiuvinio langeliais lapo buvo iškirptas kvadratas, o tada iš kvadrato iškirptos dvi iš sunumeruotų figūrų. Kurios?

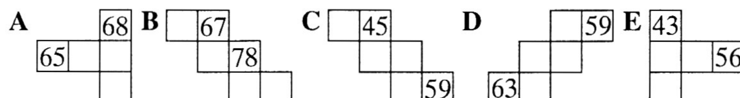




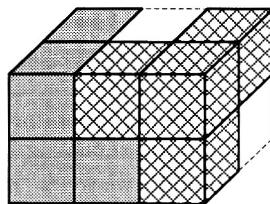
A 1 ir 3 **B** 2 ir 4 **C** 2 ir 3 **D** 1 ir 4 **E** Taip iškirpti neįmanoma

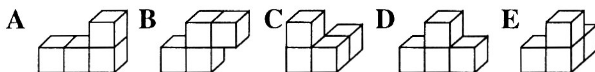
B23. Valdas visus sveikuosius skaičius nuo 0 iki 109 surašė į penkiastulpę lentelę pagal nesunkiai įžiūrimą taisyklę. Šalia pavaizduota jo lentelės pradžia. Kuris iš pateiktų paveikslėlių negali būti Valdo lentelės dalis?

0	2	4	6	8
1	3	5	7	9
10	12	14	16	18
11	13	15	17	19
20	22	24	26	28
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



B24. Marius sudėjo stačiakampį gretasienį iš 3 skirtingai išmargintų detalių, kurių kiekviena suklijuota iš 4 kubelių. Po to vieną detalę jis išėmė (žr. paveikslėlį). Kurią?

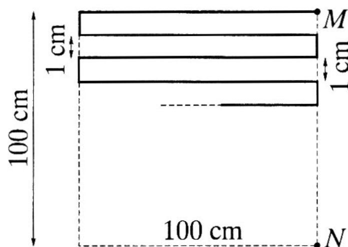




B25. Tu turi 6 atkarpas, kurių ilgiai yra 1 cm, 2 cm, 3 cm, 2001 cm, 2002 cm, 2003 cm. Keliais būdais tu gali išsirinkti tris atkarpas, kad iš jų būtų įmanoma sudaryti trikampį?
A 1 **B** 3 **C** 5 **D** 6 **E** Daugiau kaip 10

B26. Urve buvo visiškai raudonų ir visiškai žalių slibinų. Kiekvienas raudonas slibinas turėjo 6 galvas, 8 kojas ir 2 uodegas, o kiekvienas žalias slibinas turėjo 8 galvas, 6 kojas ir 4 uodegas. Iš viso slibinai turėjo 44 uodegas, o žalių kojų buvo šešiomis mažiau nei raudonų galvų. Kiek raudonųjų slibinų buvo urve?
A 6 **B** 7 **C** 8 **D** 9 **E** 10

B27. Koks yra ilgis (cm) linijos (žr. paveikslėlį), jungiančios kvadrato viršūnes M ir N?

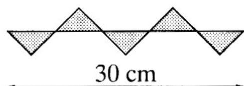


A 10 200 **B** 2 500 **C** 909 **D** 10 100 **E** 9 900

B28. Paveikslėlyje kiekvienas iš ženklų — kvadratukas, trikampiukas ir skrituliukas reiškia tam tikrą skaitmenį. Kam lygi suma □ + ◯?
A 6 **B** 7 **C** 8 **D** 9 **E** 13

□□□
+□□◯
□△△
2 0 0 3

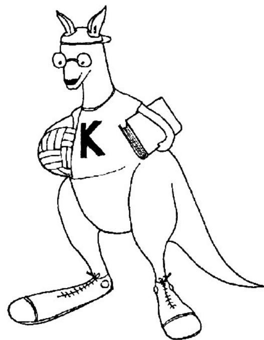
B29. Užtušuotą figūrą paveikslėlyje sudaro penki vienodi lygiašoniai statieji trikampiai.



Raskite užtušuotos figūros plotą (cm^2).
A 20 **B** 25 **C** 35 **D** 45 **E** Rasti neįmanoma

B30. Onutė turi dėžutę, kurioje yra 9 pieštukai. Mažiausiai vienas iš jų yra mėlynas. Iš kiekvienų 4 pieštukų bent du yra tos pačios spalvos, o iš kiekvienų 5 pieštukų daugiausiai 3 yra tos pačios spalvos. Kiek yra mėlynų pieštukų?
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 1 **E** Nustatyti neįmanoma

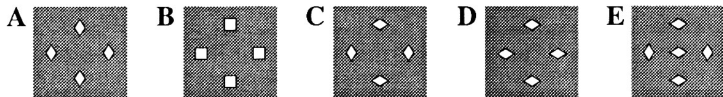
KADETAS (VII ir VIII klasės)

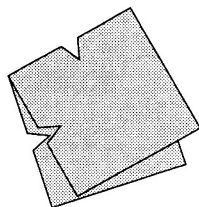


KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

K1. Zooparduotuvėje buvo 5 papūgos. Jų vidutinė kaina buvo 6 000 litų. Vieną dieną brangiausia papūga buvo parduota. Likusių 4 papūgų vidutinė kaina pasidarė 5 000 litų. Kiek litų kainavo parduotoji papūga?
A 1 000 **B** 2 000 **C** 5 500 **D** 6 000 **E** 10 000

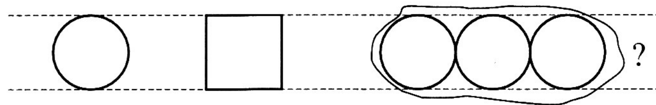
K2. Sulankstyta servetėlė buvo prakirpta taip, kaip tat parodyta paveikslėlyje. Kaip atrodys servetėlė ją atlanksčius?





K3. Iš 16 kvadratėlių sudėtas kvadratas. Kiek daugiausiai kvadratėlių galima padalyti į dvi dalis viena tiese?
A 3 **B** 4 **C** 6 **D** 7 **E** 8

K4. Pavaizduoto medinio skritulio plotas lygus a, medinio kvadrato plotas b. Apjuoskime tris pavaizduotus skritulius jų nepajudindami kaip galima trumpesniu siūlu. Kokį plotą apjuos siūlas?

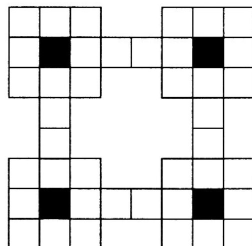


A $3b$ **B** $2a + b$ **C** $a + 2b$ **D** $3a$ **E** $a + b$

K5. Kiek daugiausiai vidaus stačiųjų kampų gali turėti šešiakampis (nebūtinai iškilasis)?
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

K6. Į ąsotėlį vandens telpa tiek, kiek į butelį ir stiklinę kartu. Į butelį telpa tiek, kiek į stiklinę ir bokalą kartu. Į tris bokalus telpa tiek, kiek į 2 ąsotėlius. Kiek stiklinių vandens telpa į bokalą?
A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 6 **E** 7

K7. Pavaizduota lenta sudaryta iš 44 langelių 1×1. Keliais būdais galima uždengti jos 40 baltųjų langelių dvidešimčia stačiakampių kauliukų 1×2? (Lentos sukioti negalima. Du būdai laikomi skirtingais, jeigu bent vienas kauliukas padėtas kitaip.)
A 8 **B** 16 **C** 32 **D** 64 **E** 100



K8. Imamas natūralusis skaičius, turintis bent du skaitmenis. Nubraukus paskutinį skaitmenį, jis sumažėja n kartų. Kokia gali būti didžiausia n reikšmė?
A 9 **B** 10 **C** 11 **D** 19 **E** 20

K9. Nubrėžtos 4 atkarpos. Kiek susikirtimo taškų jos *negali* turėti?
A 2 **B** 3 **C** 5 **D** 6 **E** 7

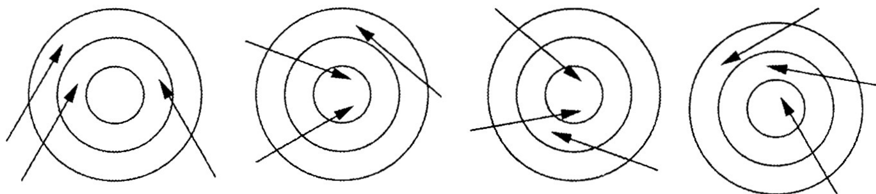
K10. Kiekvienas iš žemiau parašytų skaičių dauginamas iš 768. Kuris skaičius duoda sandaugą, besibaigiančią didžiausiu nulių skaičiumi?
A 7 500 **B** 5 000 **C** 3 125 **D** 2 500 **E** 10 000

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

K11. Ant stalo guli kvadratinis peršviečiamos plėvelės lapas, kuriame parašyta raidė y. Lapą pasukame 90° pagal laikrodžio rodyklę, tada perverčiame per kairįjį jo kraštą, po to pasukame prieš laikrodžio rodyklę 180°. Ką dabar matome?
A ≺ **B** ≻ **C** ʎ **D** ≺ **E** y

K12. Mykolas turi 42 vienodus kubelius, kurių briaunos ilgis yra 1 cm. Iš visų kubelių jis sustatė pilnavidurį stačiakampį gretasienį. To gretasienio pagrindo perimetras yra 18 cm. Koks gretasienio aukštis?
A 1 cm **B** 2 cm **C** 3 cm **D** 4 cm **E** 5 cm

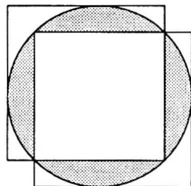
K13. Lukas paleido po 3 strėles į kiekvieną iš 4 vienodų taikinių. Pirmame taikinyje jis išmušė 29 taškus, antrame — 43, trečiame — 47. Kiek taškų išmušė Lukas ketvirtame taikinyje?



A 31 **B** 33 **C** 36 **D** 38 **E** 39

K14. Tuščias sunkvežimis sveria 2000 kg. Pakrovus prekes, krovinys sudarė 80% pakrauto sunkvežimio masės. Pirmam gavėjui iškrautas ketvirtadalis krovinio. Kiek dabar procentų masės sunkvežimio su likusiu kroviniu sudaro krovinys?
A 20% **B** 25% **C** 55% **D** 60% **E** 75%

K15. Du vienodi kvadratai dengia skritulį, kurio spindulys yra 3. Kam lygus užtušuotos srities plotas?



A $8(\pi - 1)$ **B** $6(2\pi - 1)$ **C** $9\pi - 25$ **D** $9(\pi - 2)$ **E** $\frac{6\pi}{5}$

K16. Tu turi 6 atkarpas, kurių ilgiai yra 1 cm, 2 cm, 3 cm, 2001 cm, 2002 cm, 2003 cm. Keliais būdais tu gali išsirinkti tris atkarpas, kad iš jų būtų įmanoma sudaryti trikampį?
A 1 **B** 3 **C** 5 **D** 6 **E** Daugiau kaip 10

K17. Išrašome visus natūraliojo skaičiaus n daliklius, nelygius 1 ir n. Didžiausias iš jų yra 15 kartų didesnis už mažiausią. Kiek yra tokių n?
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** Be galo daug

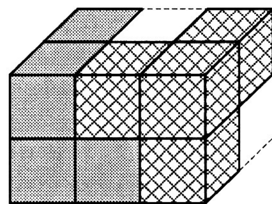
K18. Tiesėje iš kairės į dešinę pažymėti taškai K, L, M, N, P, R išvardyta tvarka. Jeigu $KN = MR$ ir $LN = NR$, tai būtinai
A $KL = LM$ **B** $LM = NP$ **C** $LN = PR$ **D** $KL = MN$ **E** $MN = PR$

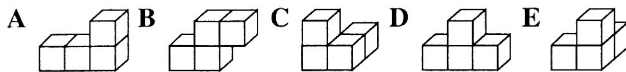
K19. Marytė turi 6 korteles, kurių kiekvienoje parašyta po natūralųjį skaičių. Ji ima 3 korteles ir sudeda jose parašytus skaičius. Taip ji perrenka visas 20 galimybių pasirinkti 3 korteles ir pastebi, kad dešimt sumų buvo lygios 16, o likusios dešimt — lygios 18. Koks buvo mažiausias iš skaičių, užrašytų kortelėse?
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

K20. Paulius, Bartas, Jonas, Mykolas ir Tomas stovi ratu, ir visi atstumai tarp dviejų greta stovinčių berniukų skirtingi. Kiekvienas jų vienas po kito pasako vardą berniuko, kuris stovi arčiausiai. Pauliaus ir Barto vardai buvo ištarti po 2 kartus, o Jono — vieną kartą. Tada
A Paulius ir Bartas nestovi greta
B Mykolas ir Tomas nestovi greta
C Mykolas ir Tomas stovi greta
D aprašytoji situacija yra neįmanoma
E visi atsakymai **A**, **B**, **C** ir **D** klaidingi

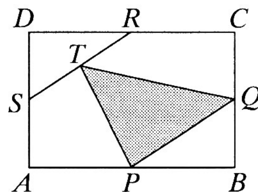
KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

K21. Marius sudėjo stačiakampį gretasienį iš 3 skirtingai išmargintų detalių, kurių kiekviena suklijuota iš 4 kubelių. Po to vieną detalę jis išėmė (žr. paveikslėlį). Kurią?

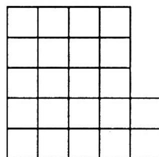


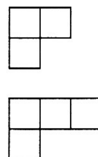


K22. Stačiakampio $ABCD$ kraštinių AB, BC, CD ir AD vidurio taškai yra P, Q, R ir S, o atkarpos RS vidurio taškas yra T. Kurią stačiakampio $ABCD$ ploto dalį dengia trikampis PQT?
A $\frac{5}{16}$ **B** $\frac{1}{4}$ **C** $\frac{1}{5}$ **D** $\frac{1}{6}$ **E** $\frac{3}{8}$

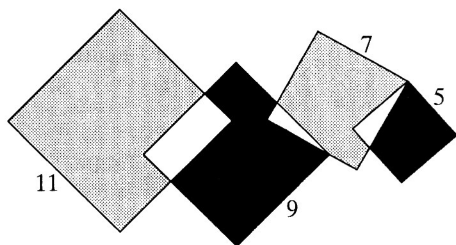


K23. Rimas sudėjo didžiąją figūrą iš šalia pavaizduotų trikvadračių ir keturkvadračių fragmentų juos sukiodamas, bet nevartydamas. Kiek mažiausiai trikvadračių fragmentų jam galėjo prireikti?
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 6 **E** Sudėti neįmanoma



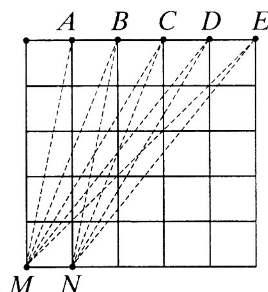


K24. Paveikslėlyje keturių persiklojančių kvadratų kraštinės lygios 11, 9, 7 ir 5. Kam lygus dviejų pilkai užtušuotų sričių bendro ploto ir dviejų juodai užtušuotų sričių bendro ploto skirtumas?
A 25 **B** 36 **C** 49 **D** 64 **E** 0

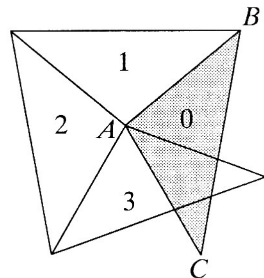


K25. Knygų lentynoje sustatyta 50 fizikos ir matematikos knygų. Jokia fizikos knyga nestovi šalia kitos fizikos knygos, bet šalia kiekvienos matematikos knygos yra dar bent viena matematikos knyga. Kuris iš pateikiamų teiginių *gali būti klaidingas*?
A Matematikos knygų yra ne mažiau kaip 32
B Fizikos knygų yra ne daugiau kaip 17
C Yra 3 paeiliui stovinčios matematikos knygos
D Jeigu yra 17 fizikos knygų, tai iš jų bent viena yra pirma arba paskutinė
E Iš devynių paeiliui stovinčių knygų bent 6 yra matematikos knygos

K26. Kvadratas padalytas į 25 mažesnius kvadratus (žr. paveikslėlį). Kokia yra kampų MAN, MBN, MCN, MDN, MEN didumų suma?
A 30° **B** 45° **C** 60° **D** 75° **E** 90°



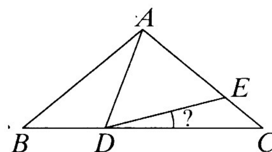
K27. Lygiašonio trikampio BAC kampas prie viršūnės A lygus 100° (žr. brėžinį). Pažymėkime tą trikampį numeriu 0 ir sukime jį prieš laikrodžio rodyklę tol, kol gausime trikampį 1, turintį su trikampiu 0 bendrą kraštinę. Tada panašiai sukame trikampį 1, gauname trikampį 2, tada sukame trikampį 2 ir gauname trikampį 3, ir t. t. Koks yra mažiausias numeris trikampio, kuris visiškai sutaps su trikampiu 0?
A 10 **B** 12 **C** 14 **D** 16 **E** 18



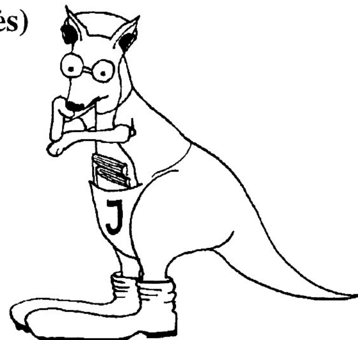
K28. Kiek yra tokių natūraliųjų skaičių n, kad dalydami 2003 iš n gausime liekaną 23?
A 22 **B** 19 **C** 13 **D** 12 **E** 36

K29. Plokštumoje duota 10 taškų, iš kurių jokie 3 nėra vienoje tiesėje. Kiekvieni du taškai sujungti atkarpa. Kiek daugiausiai tų atkarpų gali kirsti tiesė, neinanti nė per vieną iš duotųjų taškų?
A 20 **B** 25 **C** 30 **D** 35 **E** 45

K30. Trikampyje ABC (žr. brėžinį) $AB = AC$, $AE = AD$, $\angle BAD = 30°$. Koks kampo CDE didumas?
A 10° **B** 15° **C** 20° **D** 25° **E** 30°

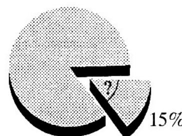


JUNIORAS (IX ir X klasės)

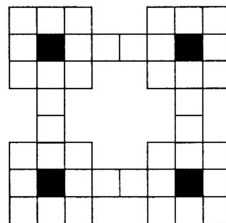


KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

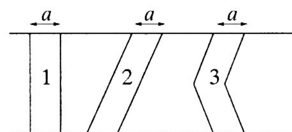
J1. Iš apskrito torto išpjauta porcija, sudaranti 15% viso torto. Kiek laipsnių turi paveikslėlyje klaustuku pažymėtas kampas?
A 30° **B** 45° **C** 54° **D** 15° **E** 20°



J2. Pavaizduota lenta sudaryta iš 44 langelių 1×1. Keliais būdais galima uždengti jos 40 baltųjų langelių dvidešimčia stačiakampių kauliukų 1×2? (Lentos sukioti negalima. Du būdai laikomi skirtingais, jeigu bent vienas kauliukas padėtas kitaip.)
A 8 **B** 16 **C** 32 **D** 64 **E** 100



J3. Trys juostos, pažymėtos paveikslėlyje numeriais 1, 2 ir 3, yra to paties pločio a. Visos trys juostos jungia dvi lygiagrečias tieses. Kurios juostos plotas didžiausias?
A Visų juostų plotas toks pat
B 1 juostos **C** 2 juostos **D** 3 juostos
E Nežinant a nustatyti neįmanoma



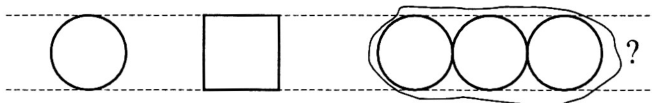
J4. Kuris iš žemiau pateikiamų skaičių yra nelyginis su kiekvienu sveikuoju n?
A $2003n$ **B** $n^2 + 2003$ **C** n^3 **D** $n + 2004$ **E** $2n^2 + 2003$

J5. Trikampio ABC kampas C yra triskart didesnis už kampą A, o kampas B yra dukart didesnis už kampą A. Tada trikampis ABC yra
A lygiakraštis **B** lygiašonis **C** bukasis **D** statusis **E** smailusis

J6. Trys dainininkai dainuoja linksmą dainą. Ji susideda iš trijų kupletų, kurių kiekvieną sudaro keturios eilutės, ir visų eilučių ilgis vienodas. Kiekvienas dainininkas sudainuoja dainą nuo pradžios iki galo, tik antras dainininkas pradeda dainuoti, kai pirmas pradeda pirmo kupleto antrą eilutę, o trečias — kai pirmas pradeda pirmo kupleto trečią eilutę. Kurią dainos atlikimo laiko dalį visi trys dainininkai dainuoja kartu?
A $\frac{3}{5}$ **B** $\frac{4}{5}$ **C** $\frac{4}{7}$ **D** $\frac{5}{7}$ **E** $\frac{7}{11}$

J7. Skaičius $a = 111\ldots111$ užrašomas 2003 vienetais. Kam lygi sandaugos $2003 \cdot a$ skaitmenų suma?
A 10 000 **B** 10 015 **C** 10 020 **D** 10 030 **E** 2003^2

J8. Pavaizduoto medinio skritulio plotas lygus a, medinio kvadrato plotas b. Apjuoskime tris pavaizduotus skritulius jų nejudindami kaip galima trumpesniu siūlu.



Kokį plotą apjuos siūlas?
A $3b$ **B** $2a+b$ **C** $a+2b$ **D** $3a$ **E** $a+b$

J9. Kelios iš funkcijų $f(x)=0$, $f(x)=\frac{1}{2}$, $f(x)=1$, $f(x)=x$, $f(x)=-x$ tenkina lygtį $f(x^2+y^2)=f^2(x)+f^2(y)$?
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

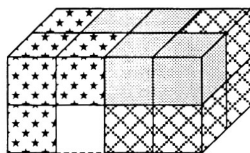
J10. Paveikslėlyje raidės X, Y, Z žymi skirtingus skaitmenis, nelygius nuliui. Kokį skaitmenį slepia raidė X?
A 1 **B** 2 **C** 7 **D** 8 **E** 9

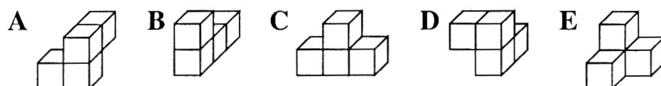
$$\begin{array}{r} XX \\ +\,YY \\ ZZ \\ \hline ZYX \end{array}$$

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

J11. Onutė turi dėžutę, kurioje yra 9 pieštukai. Mažiausiai vienas iš jų yra mėlynas. Iš kiekvienų 4 pieštukų bent du yra tos pačios spalvos, o iš kiekvienų 5 pieštukų daugiausiai 3 yra tos pačios spalvos. Kiek yra mėlynų pieštukų?
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 1 **E** Nustatyti neįmanoma

J12. Marius sudėjo stačiakampį gretasienį iš 4 skirtingai išmargintų detalių, kurių kiekviena suklijuota iš 4 kubelių. Po to vieną detalę jis išėmė (žr. paveikslėlį). Kurią?

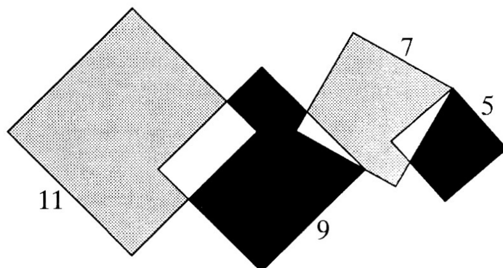




J13. Kai iš pilnos statinės nupilta 30% vandens, tai joje yra vandens 30 litrų daugiau nei tada, kai į statinę įpilta 30% vandens. Kiek litrų vandens telpa į statinę?
A 60 **B** 75 **C** 90 **D** 100 **E** 120

J14. Kiekvienas iš dviejų mokinių pakeitė skaičiaus 888 du skaitmenis ir gavo po naują triženklį skaičių, dalų iš 8. Koks yra didžiausias įmanomas taip gautų skaičių skirtumas?
A 800 **B** 840 **C** 856 **D** 864 **E** 904

J15. Paveikslėlyje keturių persiklojančių kvadratų kraštinės lygios 11, 9, 7 ir 5. Kam lygus dviejų pilkai užtušuotų sričių bendro ploto ir dviejų juodai užtušuotų sričių bendro ploto skirtumas?
A 25 **B** 36 **C** 49 **D** 64 **E** 0



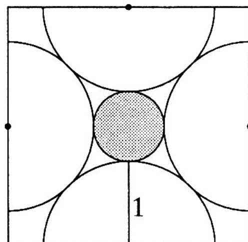
J16. Kam lygi sandauga

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2003}\right)?$$

A 2004 **B** 2003 **C** 2002 **D** 1002 **E** 1001

J17. Paveikslėlyje matome keturis besiliečiančius pusapskritimius, kurių centrai yra kvadrato kraštinių vidurio taškai, o spindulys lygus 1. Koks yra spindulys apskritimo, kuris liečia visus keturis pusapskritimius?

A $\sqrt{2}-1$ **B** $\frac{\pi}{2}-1$ **C** $\sqrt{3}-1$ **D** $\sqrt{5}-2$ **E** $\sqrt{7}-2$



J18. Sudarykime visus skirtingus keturženklius skaičius, kuriuos gauname iš skaičiaus 2003 perstatę jo skaitmenis. Kam lygi skaičiaus 2003 ir visų sudarytųjų skaičių suma?

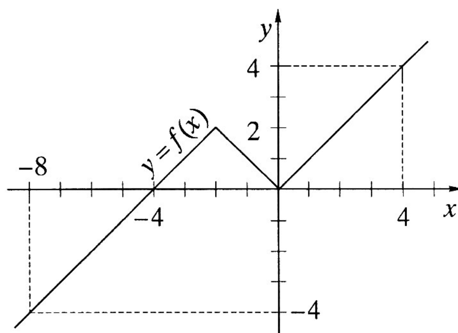
A 5 005 **B** 5 555 **C** 16 665 **D** 1 110 **E** 15 555

J19. Sekos pirmas narys yra 1, antras 2. Trečias sekos narys gaunamas pirmą narį padalijus iš antro, ketvirtas — antrą iš trečio ir t. t. Kam lygus dešimtas sekos narys?

A 2^{-10} **B** 256 **C** 2^{-13} **D** 1024 **E** 2^{34}

J20. Funkcija $f(x)$ apibrėžta visiems realiesiems skaičiams x. Jos grafiką sudaro dvi pustiesės ir atkarpa (žr. brėžinį). Nesunku įsitikinti, kad -8 yra lygties $f(f(x)) = 0$ sprendinys: $f(f(-8)) = f(-4) = 0$. Raskite visus lygties $f(f(f(x))) = 0$ sprendinius.

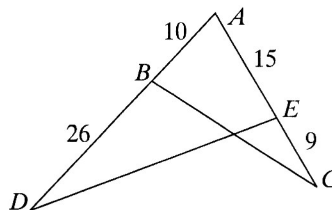
A $-4; 0$ **B** $-8; -4; 0$
C $-12; -8; -4; 0$
D $-16; -12; -8; -4; 0$
E Sprendinių nėra



KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

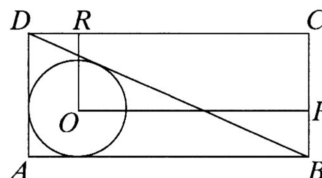
J21. Kam lygus trikampio ADE ir trikampio ABC (žr. brėžinį) plotų santykis?

A $\frac{9}{4}$ **B** $\frac{7}{3}$ **C** $\frac{4}{5}$ **D** $\frac{15}{10}$ **E** $\frac{26}{9}$



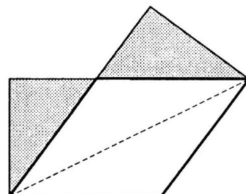
J22. Stačiakampio $ABCD$ plotas lygus 36. Taškas O yra į trikampį ABD įbrėžto apskritimo centras (žr. brėžinį). Kam lygus stačiakampio $OPCR$ plotas?

A 24 **B** 6π **C** 18 **D** $12\sqrt{2}$
E Plotas priklauso nuo AB ir AD santykio



J23. Keturi vaikai K, L, M ir N pasakė:
K: L, M ir N yra mergaitės
L: K, M ir N yra berniukai
M: K ir L meluoja
N: K, L ir M sako teisybę
Keli iš vaikų sakė teisybę?
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** Nustatyti neįmanoma

J24. Stačiakampis popieriaus lapas 6×12 perlenkiamas per jo įstrižainę. Po to nukerpami 2 viengubi trikampiai, išsikišantys už dvigubos dalies (paveikslėlyje užtušuoti). Tada lapas vėl atlenkiamas, ir gauname rombą. Kam lygi rombo kraštinė?
A $\frac{7\sqrt{5}}{2}$ **B** 7,35 **C** 7,5 **D** 7,85 **E** 8,1



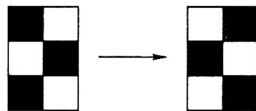
J25. Kiek skirtingų porų $(x; y)$ tenkina lygtį $(x + y)^2 = xy$?
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** Be galo daug

J26. Nagrinėkime skaičius, kurių skaitmenų suma nesidalija iš 5. Kiek daugiausiai tokių skaičių gali eiti iš eilės?
A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 8 **E** 9

J27. Knygų lentynoje sustatyta 50 fizikos ir matematikos knygų. Jokia fizikos knyga nestovi šalia kitos fizikos knygos, bet šalia kiekvienos matematikos knygos yra dar bent viena matematikos knyga. Kuris iš pateikiamų teiginių *gali būti klaidingas*?
A Matematikos knygų yra ne mažiau kaip 32
B Fizikos knygų yra ne daugiau kaip 17
C Yra 3 paeiliui stovinčios matematikos knygos
D Jeigu yra 17 fizikos knygų, tai iš jų bent viena yra pirma arba paskutinė
E Iš devynių paeiliui stovinčių knygų bent 6 yra matematikos knygos

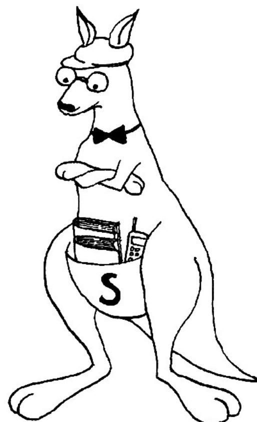
J28. Iš skaičių 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 imami 3 skirtingi ir randama jų suma. Kiek skirtingų sumų taip galima gauti?
A 13 **B** 21 **C** 22 **D** 30 **E** 120

J29. Paveikslėlyje pavaizduoti du šachmatų lentos fragmentai. Reikia kairįjį fragmentą paversti dešiniuoju, prisilaikant tokios taisyklės: vienu žingsniu galima perdažyti du kvadratėlius, turinčius bendrą kraštinę, bet juodą kvadratėlį galima perdažyti tik žaliai, žalią — baltai, o baltą — juodai. Kiek mažiausiai žingsnių tam prireiks?
A 3 **B** 5 **C** 6 **D** 8 **E** 9



J30. Surašykime visus vien skaitmenimis 0 ir 1 užrašomus sveikuosius skaičius pradedant nuo vienaženklių ir baigiant penkiaženkliais. Kiek vienetų mums teks parašyti?
A 36 **B** 48 **C** 80 **D** 160 **E** 320

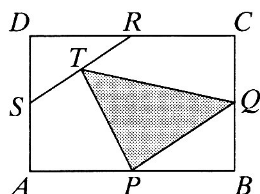
SENJORAS (XI ir XII klasės)



KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

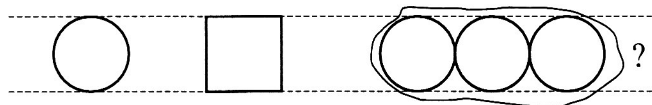
S1. Ona turi dėžutę, kurioje yra 9 pieštukai. Mažiausiai vienas iš jų yra mėlynas. Iš kiekvienų 4 pieštukų bent du yra tos pačios spalvos, o iš kiekvienų 5 pieštukų daugiausiai 3 yra tos pačios spalvos. Kiek yra mėlynų pieštukų?
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 1 **E** Nustatyti neįmanoma

S2. Stačiakampio $ABCD$ kraštinių AB, BC, CD ir AD vidurio taškai yra P, Q, R ir S, o atkarpos RS vidurio taškas yra T.



Kurią stačiakampio $ABCD$ ploto dalį dengia trikampis PQT?
A $\frac{5}{16}$ **B** $\frac{1}{4}$ **C** $\frac{1}{5}$ **D** $\frac{1}{6}$ **E** $\frac{3}{8}$

S3. Pavaizduoto medinio skritulio plotas lygus a, medinio kvadrato plotas b. Apjuoskime tris pavaizduotus skritulius jų nejudindami kaip galima trumpesniu siūlu.



Kokį plotą apjuos siūlas?
A $3b$ **B** $2a+b$ **C** $a+2b$ **D** $3a$ **E** $a+b$

S4. Alius apskaičiavo rutulio tūrį, bet skaičiuodamas apsiriko ir vietoj rutulio spindulio ėmė skersmens reikšmę. Ką jis dabar turėtų padaryti su rezultatu, kad gautų teisingą atsakymą?
A Padalyti iš 2 **B** Padalyti iš 4 **C** Padauginti iš 6 **D** Padalyti iš 8 **E** Padauginti iš 8

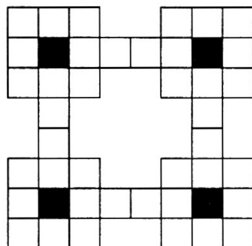
S5. Jeigu n — natūralusis skaičius, tai $2^{n+2003}+2^{n+2003}$ lygu
A 2^{n+2004} **B** $2^{2n+4006}$ **C** $4^{2n+4006}$ **D** $4^{2n+2003}$ **E** 4^{n+2003}

S6. Su kuriais iš pateikiamų duomenų trikampis ABC egzistuoja?
A $AB = 11\,\text{cm}$, $BC = 19\,\text{cm}$, $CA = 7\,\text{cm}$
B $AB = 11\,\text{cm}$, $BC = 7\,\text{cm}$, $\angle BAC = 60^\circ$
C $AB = 11\,\text{cm}$, $CA = 7\,\text{cm}$, $\angle CBA = 128^\circ$
D $AB = 11\,\text{cm}$, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle CBA = 128^\circ$
E Nė su vienais iš jų

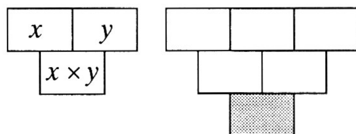
S7. Į mokyklą priimtų per ketverius metus 1998–2001 moksleivių vidutinis metinis skaičius buvo 325. Į mokyklą priimtų per penkerius metus 1998–2001 moksleivių vidutinis metinis skaičius yra 20% didesnis. Kiek moksleivių buvo priimta į mokyklą 2002 metais?
A 650 **B** 600 **C** 455 **D** 390 **E** 345

S8. Raskite visas parametro m reikšmes, su kuriomis kreivės $x^2 + y^2 = 1$ ir $y = x^2 + m$ turi vienintelį bendrą tašką.
A $-\frac{5}{4}$; -1; 1 **B** $-\frac{5}{4}$; 1 **C** -1; 1 **D** $-\frac{5}{4}$ **E** 1

S9. Pavaizduota lenta sudaryta iš 44 langelių 1×1. Keliais būdais galima uždengti jos 40 baltųjų langelių dvidešimčia stačiakampių kauliukų 1×2? (Lentos sukioti negalima. Du būdai laikomi skirtingais, jeigu bent vienas kauliukas padėtas kitaip.)
A 8 **B** 16 **C** 32 **D** 64 **E** 100



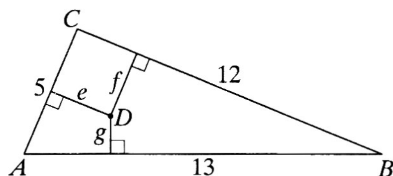
S10. Pagal žemiau kairėje schemiškai užrašytą taisyklę užpildome dešiniąją lentelę, kurios kiekviename langelyje rašomas sveikasis skaičius, didesnis už 1. Kuris iš pateikiamų penkių skaičių *negali* atsidurti užtušuotame langelyje?



A 154 **B** 100 **C** 90 **D** 88 **E** 60

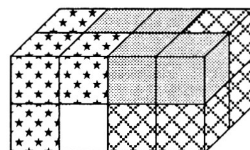
KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

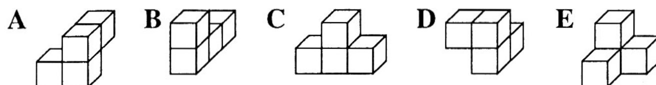
S11. Trikampio ABC plotas 30. Vidaus taško D atstumai iki trikampio kraštinių lygūs e, f ir g (žr. brėžinį). Kokią reikšmę įgyja reiškinys $5e + 12f + 13g$?



A 120 **B** 90 **C** 60 **D** 30 **E** Nežinant tikslios taško D padėties nustatyti neįmanoma

S12. Marius sudėjo stačiakampį gretasienį iš 4 skirtingai išmargintų detalių, kurių kiekviena suklijuota iš 4 kubelių. Po to vieną detalę jis išėmė (žr. paveikslėlį). Kurią?





S13. Dvi baltos ir aštuonios pilkos žuvėdros skrido per upę. Staiga atsitiktine tvarka jos visos nutūpė ant kranto vienoje tiesėje. Kokia yra tikimybė, kad abi baltosios žuvėdros tupi greta?

A $\frac{1}{5}$ **B** $\frac{1}{6}$ **C** $\frac{1}{7}$ **D** $\frac{1}{8}$ **E** $\frac{1}{9}$

S14. Kam lygi reiškinio

$$\sqrt{1 + 2000\sqrt{1 + 2001\sqrt{1 + 2002\sqrt{1 + 2003 \cdot 2005}}}}$$

reikšmė?

A 2000 **B** 2001 **C** 2002 **D** 2003 **E** 2004

S15. Smailiojo trikampio dviejų kraštinių ir į trečiąją jo kraštinę nuleistos aukštinės ilgiai yra 12, 13, 15 (nebūtinai išvardyta tvarka). Raskite trikampio plotą.

A 168 **B** 80 **C** 84 **D** $6\sqrt{65}$ **E** Nustatyti neįmanoma

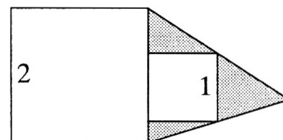
S16. Seka sudaryta iš visų natūraliųjų skaičių septintųjų laipsnių: $1^7, 2^7, 3^7, \ldots$. Kiek šios sekos narių yra tarp 5^{21} ir 2^{49}?

A 13 **B** 8 **C** 5 **D** 3 **E** 2

S17. Raskite tokį didžiausią dviženklį natūralųjį skaičių n, kad $10^n + 1$ būtų skaičiaus 101 kartotinis.

A 92 **B** 94 **C** 96 **D** 98 **E** 99

S18. Didesnio kvadrato kraštinė lygi 2, o prie jo prišlieto mažesnio kvadrato (žr. brėžinį) — lygi 1. Kam lygus užtušuotos srities plotas?



A 1 **B** 2 **C** $2\sqrt{2}$ **D** 4

E Tai priklauso nuo mažesniojo kvadrato padėties

S19. Kelios iš funkcijų

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \frac{1}{2}, \quad f(x) = 1, \quad f(x) = x, \quad f(x) = -x$$

tenkina lygtį $f(x^2 + y^2) = f^2(x) + f^2(y)$?

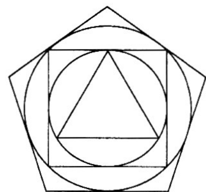
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

S20. Jeigu $a^4 + \frac{1}{a^4} = 4$, tai $a^6 + \frac{1}{a^6}$ lygu

A $4\sqrt{6}$ **B** $3\sqrt{6}$ **C** 6 **D** $5\sqrt{6}$ **E** $6\sqrt{6}$

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

S21. Brėžinyje iš pradžių nubrėžtas taisyklingasis trikampis, tada apie jį apibrėžtas apskritimas, apie apskritimą apibrėžtas kvadratas, apie kvadratą apibrėžtas apskritimas, apie apskritimą apibrėžtas taisyklingasis penkiakampis. Tęsiame procedūrą: apie penkiakampį apibrėžiame apskritimą, apie apskritimą apibrėžiame taisyklingąjį šešiakampį ir t. t. Sustojame nubrėžę taisyklingąjį 16-kampį. Į kiek atskirų sričių padalytas to 16-kampio vidus?



A 232 **B** 240 **C** 248 **D** 264 **E** 272

S22. Taškas $P(x; y)$ priklauso apskritimui, kurio centras $M(2; 2)$, o spindulys r. Sakykime, kad x, y ir r yra natūralieji skaičiai ir $y = r > 2$. Kokia yra mažiausia galima x reikšmė?
A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 10

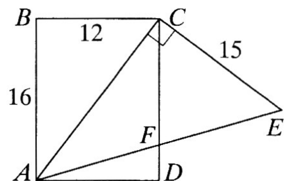
S23. Visi keturi skaičiai A, B, $A - B$, $A + B$ — natūralieji pirminiai. Tada jų suma
A lyginė **B** dalijasi iš 3 **C** dalijasi iš 5 **D** dalijasi iš 7 **E** pirminis skaičius

S24. Parduotuvės vadybininkas turi užduotį nustatyti megztinio kainą. Rinkotyros skyrius pateikia jam tokią informaciją. Jeigu megztinio kaina bus 75 Lt, tai bus parduota 100 megztinių. Šią kainą galima didinti arba mažinti vis po 5 litus, bet kainą didinant po 5 litus parduotų megztinių skaičius mažės po 20, o kainą mažinant po 5 litus parduotų megztinių skaičius didės po 20. Parduotuvė gauna megztinius mokėdama po 30 litų. Kokia pardavimo kaina atneš didžiausią pelną?
A 85 Lt **B** 80 Lt **C** 75 Lt **D** 70 Lt **E** 65 Lt

S25. Kiek skirtingų porų $(x; y)$ tenkina lygtį $(x + y)^2 = (x + 3)(y - 3)$?
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** Be galo daug

S26. Seka $a_0, a_1, a_2, \dots$ apibrėžta taip: $a_0 = 4$, $a_1 = 6$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ $(n \geqslant 1)$. Tada a_{2003} lygus:
A $\frac{3}{2}$ **B** $\frac{2}{3}$ **C** 4 **D** $\frac{1}{4}$ **E** $\frac{1}{6}$

S27. Stačiakampyje $ABCD$ (žr. brėžinį) $AB = 16$, $BC = 12$. Tegu E yra toks taškas, kad $AC \perp CE$, $CE = 15$. Atkarpos AE ir CD kertasi taške F. Kam lygus trikampio ACF plotas?
A 75 **B** 80 **C** 96 **D** 72 **E** 48



S28. Kubo briaunos gale pripiešę rodyklę, gauname vektorių, o pripiešę rodyklę kitame briaunos gale — jam priešingą vektorių. Jeigu po rodyklę nupiešime kiekvienoje kubo briaunoje, gausime 12 vektorių, o juos sudėję — tam tikrą vektorių-sumą. Kiek skirtingų sumų galima taip gauti?
A 25 **B** 27 **C** 64 **D** 100 **E** 125

S29. Duoti 6 taisyklingojo šešiakampio viršūnių taškai ir visos atkarpos, jungiančios kiekvienus du iš jų. Dvi atkarpas vadinsime *tolimomis*, jeigu jos neturi nė vieno bendro taško. Kiek yra tolimų atkarpų porų?
A 26 **B** 28 **C** 30 **D** 34 **E** 36

S30. Sakykime, jog f yra toks daugianaris, kad $f(x^2+1) = x^4+4x^2$. Raskite $f(x^2-1)$.
A $x^4 - 4x^2$ **B** x^4 **C** $x^4 + 4x^2 - 4$ **D** $x^4 - 4$ **E** Kitas atsakymas

SPRENDIMAI

MAŽYLIS (III ir IV klasės)

M1. Ⓒ 4

! Geriausia grupuoti 3 ir -3, 2 ir -2, 1 ir -1. Gauname 4.
Teisingas atsakymas **C**.

M2. Ⓓ 160

! Antrame vagone $2 \cdot 10 = 20$ dėžių, trečiame — $2 \cdot 20 = 40$, ketvirtame — $2 \cdot 40 = 80$, penktame — $2 \cdot 80 = 160$ dėžių.
Teisingas atsakymas **D**.

M3. Ⓑ Žalia

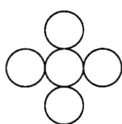
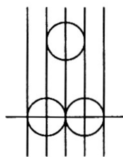
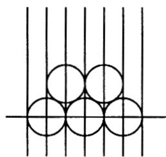
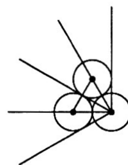
! Kadangi po 5 gėlyčių jos pradeda kartotis, tai po 15 gėlytės 16-ta bus mėlyna, o 17-ta — žalia.
Teisingas atsakymas **B**.

M4. Ⓒ 50

! Vietų yra $6 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 50$.
Teisingas atsakymas **C**.

M5. Ⓒ 6

! Jau vien nusipiešus keturias monetas, matyti, kad turėtų tilpti ir 5-ta moneta (žinoma, monetas reikia sustumti). Ar tilps šešta moneta — ne taip jau aišku.
Darykime kiek kitaip. Padėkime dvi besiliečiančias monetas (horizontaliai) ir išveskime 5 vertikalius statmenis:

Trečia moneta tilps tarp 2 ir 4 vertikalių (nes telpa abi pusikės). Kai ją nuleisime, ji (dėl simetrijos) vienu metu palies abi monetas.
Dabar padėkime 3 monetas horizontaliai ir išveskime 7 vertikales. Aišku, kad abi monetos nusileis ir lies viena kitą ir dar po 2 monetas. Bet lygiai taip pat prie tų trijų monetų galima prišlieti 2 monetas iš apačios. Vadinasi, vidurinę monetą lies 6 monetos.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Jeigu esame susipažinę su laipsnių skaičiavimu, tai visai paprasta įrodyti, kad monetą lies 6 tokios pat monetos. Iš tikrųjų, suglauskime dvi monetas ir priglauskime prie jų trečią. Jų centrai sudaro taisyklingąjį trikampį, todėl kampas tarp spindulių, išvestų iš vienos monetos centro į kitų monetų centrus, lygus 60°. Todėl kampai tarp dešiniajame paveikslėlyje išvestų pustiesių lygūs 30°. Matome, kad kiekvienas iš kairesnių apskritimų telpa į 60° sektorių. Vadinasi, į 360° tilps lygiai 6 apskritimai.

M6. Ⓒ 3

! Kadangi $MN = KN - KM = 22 - 10 = 12$, o $KL = KN - LN = 22 - 15 = 7$, tai $LM = KN - KL - MN = 22 - 7 - 12 = 3$.



Teisingas atsakymas **C**.

M7. Ⓑ 24

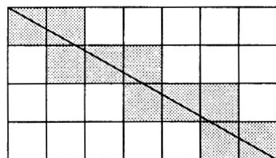
! Jeigu Ukas būtų paėmęs dar tiek pat obuolių, tai turėtų 24 obuoliais daugiau. Vadinasi, jis paėmė 24 obuolius.
Teisingas atsakymas **B**.

M8. Ⓐ 12

! Vidinį stačiakampį sudaro $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ kubelių.
Teisingas atsakymas **A**.

M9. Ⓒ 10

! Įstrižainė įeidama į langelį kerta arba horizontalę arba vertikalę, be to, ji neina per kampus (išskyrus pradžią ir galą).



Kadangi įstrižainė iš pradžių eina iš kampo, po to kerta 3 horizontales ir 6 vertikales, tai ji eina per $1 + 3 + 6 = 10$ langelių.
Teisingas atsakymas **C**.

M10. Ⓓ 110

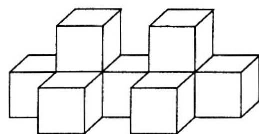
! Kadangi 7 žiedlapiai lentelėje atitinka 35 azalijų rūšis, tai vienas žiedlapis atitinka $35 : 7 = 5$ rūšis. Kadangi gerberų eilutėje nupiešta $5 \cdot 4 + 2 = 22$ žiedlapiai, tai gerberų rūšių sode yra $22 \cdot 5 = 110$.
Teisingas atsakymas **D**.

M11. Ⓒ 11 h 5 min

! Onutė miegojo 2 h 30 min + 6 h 45 min = 8 h 75 min = 9 h 15 min, o Martynas 9 h 15 min + 1 h 50 min = 10 h 65 min = 11 h 05 min.
Teisingas atsakymas **C**.

M12. Ⓒ 21

! Pavaizduotą statinį sudaro $5 + 2 + 2 = 9$ kubeliai. Todėl 1 kubelis sveria $189 : 9 = 21$ g.



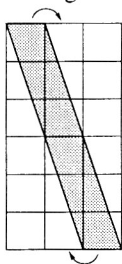
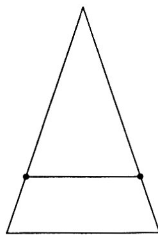
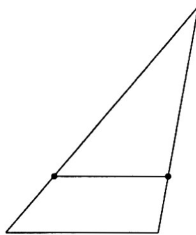
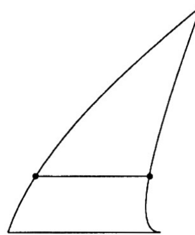
Teisingas atsakymas **C**.

M13. Ⓐ 6 m 78 cm

Sprindžio geriausias rezultatas iki olimpiados buvo 50 dm 55 cm, o pergalingas šuolis 5 m 55 cm + 123 cm = 5 m 178 cm = 6 m 78 cm.
Teisingas atsakymas **A**.

M14. Ⓓ 18

Nekelia abejonių, kad abi raidės N „kojos“ užima po 6 langelius. Bet nesunku įsitikinti, kad ir „skersinis“ užima 6 langelius: užtenka perkelti „atkirptas“ dalis, kaip parodyta paveikslėlyje, ir vėl gauname stačiakampį iš 6 kvadratėlių.
Teisingas atsakymas **D**.

Matome, kad tiek kojos, tiek skersinio plotis bet kuriame aukštyje pastovus. Garsusis Kavaljerio principas (Kavaljeris — XVII a. italų matematikas) teigia, kad dviejų figūrų plotai lygūs, jeigu bet kuriame aukštyje jų plotis vienodas (ir net nebūtinai visur tas pats — kaip kad trijuose dešiniuosiuose paveikslėliuose).
Mūsų (raidės N) atveju tiek kojos, tiek skersinio plotis visur tas pats ir lygus vienetui. Todėl skersinio plotas taip pat lygus 6, o raidė užima plotą, lygų 18.

M15. Ⓐ 24

Verta atskirai galvoti apie valandas ir minutes. Minutės kinta nuo 00 iki 59, didžiausias vienetų skaičius 9, didžiausias dešimčių skaičius 5, taigi didžiausią sumą duoda skaičius 59, $5 + 9 = 14$. Valandų skaičius kinta nuo 00 iki 23, ir nuo 00 iki 19 didžiausią tiek dešimčių, tiek vienetų skaičių duoda 19, būtent $1+9 = 10$. Valandos 20, 21, 22, 23 nebepagerina rezultato. Taigi Birutė didžiausią sumą gaus, kai laikrodis rodys 19:59, ir ta suma lygi $10 + 14 = 24$.
Teisingas atsakymas **A**.

M16. Ⓓ 4

Kadangi klasėje 3 mokiniai neturi nei brolio, nei sesers, tai arba brolį, arba seserį, arba ir brolį ir seserį turi $29 - 3 = 26$ mokiniai. Kai sudedame mokinius, turinčius brolį, ir mokinius, turinčius seserį, tai mokinius, turinčius tiek brolį, tiek seserį, įskaitome 2 kartus. Vadinasi, tokių mokinių yra $12 + 18 - 26 = 4$.
Galima spręsti ir pasižymėjus ieškomą mokinių (turinčių tiek brolį, tiek seserį) skaičių x. Tada tik brolį turi $18 - x$ mokinių, tik seserį $12 - x$ mokinių, nei brolio, nei sesers neturi 3 mokiniai. Gauname $x + (12 - x) + (18 - x) + 3 = 29$, iš kur $33 - x = 29$, $x = 4$.
Teisingas atsakymas **D**.

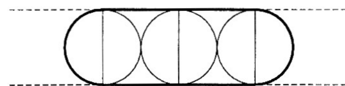
M17. Ⓑ 16

Sakykime, kad kamuolys kainuoja x litų. Tai reiškia, kad Jurgis turėjo $5x + 10$ litų. Kita vertus, 7 kamuoliai kainuoja $5x + 10 + 22$, todėl $7x = 5x + 32$, $2x = 32$, $x = 16$.
Teisingas atsakymas **B**.

Galima apsieiti ir be x. Kadangi prie 10 litų pridėjęs 22 litus Jurgis gali nupirkti dar 2 kamuolius, tai vienas kamuolys kainavo $(10 + 22) : 2 = 16$ litų.

M18. Ⓔ $a + b$

! Nubrėžkime du kvadratus, kaip tat pavaizduota paveikslėlyje. Nors siūlas „apima“ abu kvadratus, bet jis eina tik keturiomis kvadratų kraštinėmis (ir dviem pusapskritimiais).



Kadangi du pusapskritimiai sudaro visą apskritimą, o keturių kvadrato kraštinių ilgiai duoda kvadrato perimetrą, tai siūlo ilgis yra $a + b$.
Teisingas atsakymas **E**.

M19. Ⓐ

! Pasižiūrėjus į išklotinę, aišku, kad į kairę nuo durų yra langelis (kitaip sakant — nuo langelio į dešinę yra durys). Todėl atkrenta atsakymai **B**, **C**, **D**, **E** (negana to, atveju **E** durys siaurojoje sienoje — o turi būti plačiojoje). Namelis **A** tenkina abi minėtas sąlygas.
Teisingas atsakymas **A**.

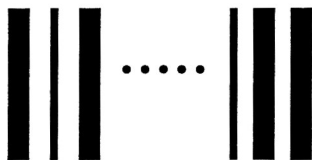
M20. Ⓔ 1

! Pirma, kas ateina į galvą — pasižymėti pirktų didžiųjų saldainių kiekį d, vidutinių v, o mažųjų m. Pagal sąlygą buvo pirkta $d + v + m = 10$ saldainių, o užmokėta $4d + 2v + m = 16$ pinigėlių. Atėmę lygybes vieną iš kitos, gauname $3d + v = 6$. Kadangi sąlygą reikia suprasti taip, jog pirkta buvo visokių saldainių, $v > 0$, tai gauname $3d < 6$, $d < 2$, t. y. $d = 1$ (nes ir $d > 0$), tada $v = 3$, $m = 6$. Nesunku įsitikinti, kad atsakymas $d = 1$ teisingas: rastosios trijų kintamųjų reikšmės tenkina abi lygtis (ir uždavinio sąlygą).
Renkamės atsakymą **E**.

!! Pasižiūrėkime, kas gi atsitiktų, jeigu kengūrėlė nebūtinai pirko visų 3 rūšių saldainių (t. y. įsivaizduokime, kad sąlygos pirmas sakinys yra toks. „Parduotuvėje buvo saldainių — didelių, vidutinių ir mažų“). Tuomet lygtyje $3d + v = 6$ galime imti $v = 0$, tada $d = 2$. Jei $d = 2$, tai $v = 0$, ir iš bet kurios iš dviejų ankstesnių lygčių $m = 8$. Atvejį $d = 1$ jau išnagrinėjome. Pagaliau, jeigu $d = 0$, tai gauname $v = 6$, ir su $m = 4$ uždavinio sąlygos išpildytos.
Taigi pakeitus porą sąlygos žodžių, gauname jau 3 sprendinius. Vieno iš jų (su $d = 0$), tiesa, nėra tarp atsakymų, bet tai menka paguoda. Aišku viena — sąlygą reikia skaityti įdėmiai.

M21. Ⓓ 4

! Kadangi yra 17 juostelių, o juostelės iš kraštų juodos, tai baltų juostelių yra 8. Kadangi baltųjų juostelių yra trimis daugiau, nei plačiųjų juodų, tai plačiųjų juodų yra 5. Todėl siaurųjų juodų yra $9 - 5 = 4$ juostelės.

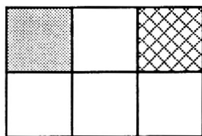


Teisingas atsakymas **D**.

!! Įdomu, kad juostelių skaičius 17 nevaidina uždavinyje jokio vaidmens. Iš tikrųjų, kadangi juodųjų juostelių yra viena daugiau nei baltųjų, tai juodųjų juostelių yra keturiomis daugiau nei plačiųjų juodų. Vadinasi, siaurųjų juodų juostelių yra keturios.

M22. Ⓓ

! Kadangi matome visus priekinio „sluoksnio“ kubelius, tai visi kubeliai išimti iš užpakalinio sluoksnio, ir išimtoji detalė „plokščia“.



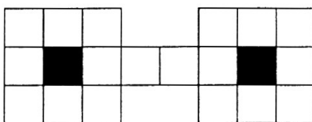
Bet matome ir viršutinius kampinius to sluoksnio kubelius — vadinasi, išimti 3 apatiniai kubeliai ir vidurinis viršutinis.
Teisingas atsakymas **D**.

M23. Ⓑ Meškiukas dukart brangesnis už šuniuką

! Šuniukas ir trys meškiukai kainuoja tiek pat, kiek trys šuniukai ir du meškiukai. Atmetę po šuniuką ir du meškiukus, matome, kad meškiukas kainuoja tiek pat, kiek du šuniukai.
Teisingas atsakymas **B**.

M24. Ⓑ 4

! Pradėkime nuo kvadratus jungiančių dviejų langelių. Aišku, kad juos galima uždengti vienu kauliuku. Bet pastumti to kauliuko nei į kairę, nei į dešinę negalima: tame kvadrate, į kurį „įlįs“ kauliukas, liks tik 7 balti langeliai, ir jų uždengti (dėl jų skaičiaus nelyginumo) negalima. Vadinasi, kauliukas jungia kvadratus (dengia abu jungiančiuosius langelius). Dar reikia uždengti abu kvadratus, bet pasidarė aišku, kad kvadratai dengiami nepriklausomai (tarsi jie iš viso nebūtų sujungti). Vadinasi, reikia nustatyti, kiek yra būdų uždengti vieną kvadratą. Imkime kurį nors kampinį langelį. Jį galima uždengti dviem būdais — padėjus kauliuką vertikaliai arba horizontaliai. Bet nors ir kaip padėtume kauliuką, sekantį (gretimą) kauliuką galima pridėti tik vienu būdu, dar sekantį — taip pat, pagaliau paskutinį taip pat vieninteliu būdu.



Taigi vieną kvadratą galima uždengti kauliukais dviem būdais. Kitą kvadratą taip pat galima uždengti dviem būdais. Vadinasi, visą lentą galima uždengti $2 \cdot 2 = 4$ būdais.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Spręsdami rėmėmės vadinamąja kombinatorine daugybos taisykle: jeigu vieną darbą atlikti galima a būdų, o kitą — b būdų, tai abu darbus galima atlikti $a \cdot b$ būdų.
Galima ir nesiremti daugybos taisykle, o tiesiog išrašyti visus uždengimo būdus. Kaip jau supratome, užtenka pasakyti, kaip uždengiame kiekvieno kvadrato kairįjį viršutinį kampą. Galimi tokie būdai: ——, —|, |—, || (pavyzdžiui, žymėjimas —| reiškia, kad kairiojo kvadrato kairįjį viršutinį langelį dengia horizontaliai padėtas kauliukas, o dešiniojo kvadrato kairįjį viršutinį langelį — vertikaliai padėtas kauliukas; žinoma, tokią padėtį galima būtų žymėti ir raidėmis HV, atitinkančiomis žodžius „horizontaliai“ ir „vertikaliai“). Taigi būdų yra 4.

BIČIULIS (V ir VI klasės)

B1. Ⓒ $(2+0)\times(0+3)$

! Suprantama, reikia viską suskaičiuoti. **A** duoda penkis, **B** — nulį, **C** — šešis, **D** — nulį, **E** — nulį. Taigi didžiausia reiškinio **C** reikšmė yra 6.
Teisingas atsakymas **C**.

B2. Ⓑ Žalia
Žr. uždavinio M3 sprendimą.

B3. Ⓐ 13

! Tokiuose uždaviniuose svarbiausia neapsirikti. Sveikieji skaičiai tarp 2,09 ir 15,3 yra 3, 4, 5, ..., 14, 15. Patogiausia samprotauti taip: skaičių nuo 3 iki 15 yra tiek pat, kiek ir skaičių nuo 1 iki 13 (iš abiejų skaičių atėmėme po 2). Dabar aišku, kad skaičių yra 13.
Teisingas atsakymas **A**.

B4. Ⓒ 12

? Peržiūrėję atsakymus, matome, kad atsakymai **A** ir **B** netinka — skaičiai 1 ir 6 nesidalija iš 4. Atsakymas **C** tinka — skaičius 12 tenkina uždavinio sąlygą.
Renkamės atsakymą **C**.

! Ieškomas skaičius turi dalytis iš 6. Surašykime 6 kartotinius: 6, 12, 18, 24, ... Matome, kad jau 12 dalijasi iš 4.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Į tą skaičių turi įeiti daugikliai 2^2 ir 3, t. y. jis turi dalytis iš 12. Mažiausias toks skaičius yra 12.

B5. Ⓑ 10

! Kadangi apatinio rato skaičių suma lygi 55, tai $Y = 55-11-14-2-13-7 = 55-25-2-20 = 10-2 = 8$. Kadangi viršutinio rato skaičių suma lygi 55, tai $X = 55-8-11-8-9-9 = 55-20-8-8-9 = 10$.
Teisingas atsakymas **B**.

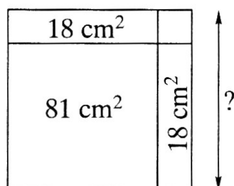
!! Kadangi kiekviename iš abiejų ratų skaičių suma ta pati (ir net neįdomu, kokia ji!), tai ji liks vienoda ir atmetus bendrus ratų skaičius Y ir 11: $X+8+9+9 = 14+2+13+7$, $X = 36-26 = 10$.

B6. Ⓐ 1000

! Tomas šimtinėmis turi $9\cdot 100 = 900$ litų, dešimtinėmis $9\cdot 10 = 90$ litų ir dar 10 litų, t. y. turi $900+90+10 = 900+100 = 1000$ litų.
Teisingas atsakymas **A**.

B7. Ⓓ 11

? Didžiojo kvadrato plotas nedaug didesnis už $81+18+18 = 117\,\text{cm}^2$, todėl spėjame, kad jo kraštinė 11 cm.
Renkamės atsakymą **D**.



! Vidutinio kvadrato plotas lygus $81\,\text{cm}^2$, todėl jo kraštinė lygi 9 cm. Vadinasi, stačiakampio plotis yra $18 : 9 = 2$ cm, o didžiojo kvadrato kraštinė $9+2 = 11$ cm.
Teisingas atsakymas **D**.

B8. Ⓐ 24
Žr. uždavinio M15 sprendimą.

B9. Ⓒ 3
Žr. uždavinio M6 sprendimą.

B10. Ⓑ 6

? Imkime mažiausią atsakymą, skaičių 4. Jis turi 3 daliklius: 1, 2, 4. Tikriname 6 — jis turi 4 daliklius: 1, 2, 3, 6.
Renkamės atsakymą **B**.

! Nesunku rasti mažiausią tokį skaičių ir kai atsakymai neduoti. Skaičius 1 netinka — jis turi tik vieną daliklį 1. Skaičiai 2, 3 ir 5 pirminiai, turi po du daliklius. Skaičius 4 turi tris daliklius. O štai skaičius 6 turi keturis daliklius: 1, 2, 3, 6.
Teisingas atsakymas **B**.

B11. Ⓒ 22

! Sprendžiant šį uždavinį, svarbu tik nesupainioti sviedinio spindulio ir skersmens. Viršutinio sviedinio spindulys yra $6 : 3 = 2\,\text{dm}$, kubo briauna $2 + 4 = 6\,\text{dm}$, apatinio sviedinio skersmuo $6 \cdot 2 = 12\,\text{dm}$, viršutinio — $2 \cdot 2 = 4\,\text{dm}$. Todėl klounas Pilypas stovi $12 + 6 + 4 = 22\,\text{dm}$ aukštyje.
Teisingas atsakymas **C**.

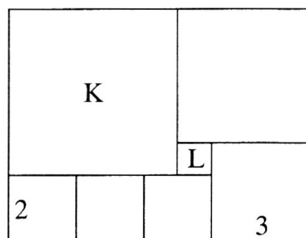
B12. Ⓒ 7

! Sudarykime visas galimas sumas: $1+2$, $1+3$, $2+3$, $1+4$, $2+4$, $3+4$, $1+5$, $2+5$, $3+5$, $4+5$. Matome, kad gauname visas įmanomas sumas nuo 3 iki 9 (beje, tam užtenka imti pirmos eilutės ir paskutinio stulpelio sumas). Vadinasi, skirtingos sumos yra 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 — iš viso septynios.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Nėra labai išmintinga sudarinėti visas galimas sumas — geriau pagalvoti, kokia suma mažiausia ir kokia didžiausia. Mažiausią sumą sudaro mažiausi dėmenys, $1 + 2 = 3$. Didžiausią sumą sudaro didžiausi dėmenys $4 + 5 = 9$. Lieka įsitikinti, kad galima gauti visas tarpines sumas: $4 = 1 + 3$, $5 = 1 + 4$, $6 = 1 + 5$, $7 = 2 + 5$, $8 = 3 + 5$, $9 = 4 + 5$. Suskaičiuokime, kiek skaičių yra nuo 3 iki 9. Jų yra tiek pat, kiek ir nuo 1 iki 7 (atėmėme po 2 — skaičiuoti mes įpratę nuo 1). Vadinasi, gauname 7 sumas.

B13. Ⓑ 25

? Kvadrato L kraštinė mažesnė už 2 — taigi greičiausiai lygi 1. Kvadrato K kraštinės ilgis didesnis už 4, bet mažesnis už 6 — taigi greičiausiai ji lygi 5. Tada kvadrato K plotas 25, kvadrato L plotas 1.
Renkamės atsakymą **B**.



! Iš paveikslėlio matome, kad kvadrato L kraštinė $\ell = 3 - 2 = 1$, o kvadrato K kraštinė $k = 3 \cdot 2 - \ell = 3 \cdot 2 - 1 = 5$. Todėl kvadrato K plotas didesnis už kvadrato L plotą $(5 \cdot 5) : (1 \cdot 1) = 25$ kartus.
Teisingas atsakymas **B**.

B14. Ⓔ $a + b$
Žr. uždavinio M18 sprendimą.

B15. Ⓑ 4

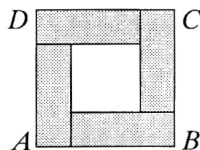
! Iš sąlygos išplaukia, jog 3 kamuoliukai žali, 5 juodi, 8 geltoni. Vadinasi, mėlynų kamuoliukų yra $20 - 3 - 5 - 8 = 4$.
Teisingas atsakymas **B**.

B16. Ⓑ 5

! Eidamas į mokyklą, Jonas pažymėjo 1-mą, 3-čią, 5-tą, 7-tą, 9-tą, 11-tą, 13-tą, 15-tą, 17-tą medžius. Grįždamas atgal jis pažymėjo 17-tą, 14-tą, 11-tą, 8-tą, 5-tą, 2-rą medžius. Taigi liko nepažymėti 4-tas, 6-tas, 10-tas, 12-tas, 16-tas medžiai, — iš viso 5 medžiai.
Teisingas atsakymas **B**.

B17. Ⓐ 400

? Kadangi kvadrato plotas lygus kraštinės kvadratui, tai tinkamas atrodo atsakymas **A**. Tada kvadrato kraštinė lygi 20 cm, ir jeigu stačiakampio plotis lygus 5 cm, tai ilgis yra 15 cm, ir viskas išeina.
Renkamės atsakymą **A**.



! Pažymėkime stačiakampio ilgį a, plotį b. Kadangi stačiakampio perimetras $40 = 2a + 2b$, tai $a + b = 20$. Bet iš paveikslėlio matome, kad kvadrato $ABCD$ kraštinė kaip tik lygi $a + b$, t. y. 20 cm. Vadinasi, kvadrato $ABCD$ plotas lygus $400\,\text{cm}^2$.
Beje, iš sprendimo matome, kad visai nesvarbu, kokie yra a ir b didumai, — svarbu tik, kad jų suma būtų 20.
Teisingas atsakymas **A**.

B18. Ⓑ 2003-03-22

! 2003 min = 30 h 203 min = 33 h 23 min. Vadinasi, būtų praėję mažiau nei 2 paros, bet daugiau nei 2 paros be 15 h, t. y. būsime tarp 2003-03-22 dienos 05:03 valandos ir 20:03 valandos, t. y. bus 2003-03-22 diena.
Teisingas atsakymas **B**.

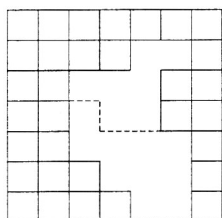
B19. Ⓑ 4
Žr. uždavinio M24 sprendimą.

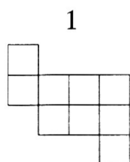
B20. Ⓓ 4
Žr. uždavinio M21 sprendimą.

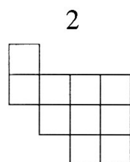
B21. Ⓐ
Žr. uždavinio M19 sprendimą.

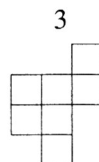
B22. Ⓒ 2 ir 3

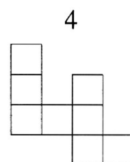
? Užrašykime, kiek kvadratėlių trūksta kvadrate ir kiek jų turi figūros 1, 2, 3 ir 4:


17


1 — 9

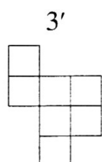

2 — 10


3 — 7

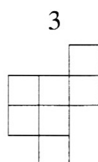

4 — 8

Vadinasi, galėtų tikti tik atsakymai **C** (10 + 7) ir **D** (9 + 8). Matome, kad labai lengvai įmontuojame figūrą 2 — nereikia jos nė vartyti. Sunkiau atpažinti likusią figūrą, nes ji apversta: pasukę 90° prieš laikrodžio rodyklę, gauname figūrą 3′, o ją apvertę per vertikaliąją ašį — figūrą 3.

3′



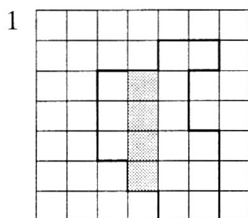
3



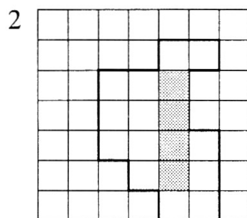
Renkamės atsakymą **C**.

! Įsitikinkime, kad nepavyksta įstatyti figūrų 1 ir 4. Tai padaryti galima, pavyzdžiui, taip. Įstatinėkime figūrą 1. Ji, be kita ko, turi 4 langelius vienoje linijoje, o iš 4 langelių „bokšto" į vieną pusę — du langelius, o į kitą — 1 langelį (neužmirškime, kad figūrą galima vartyti). Jau vien įdėti 4 langelių bokštą yra tik 5 padėtys.

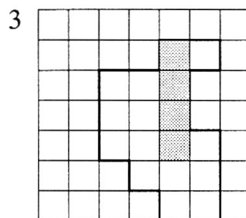
1



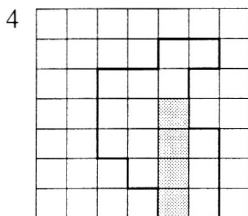
2



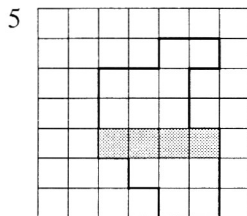
3



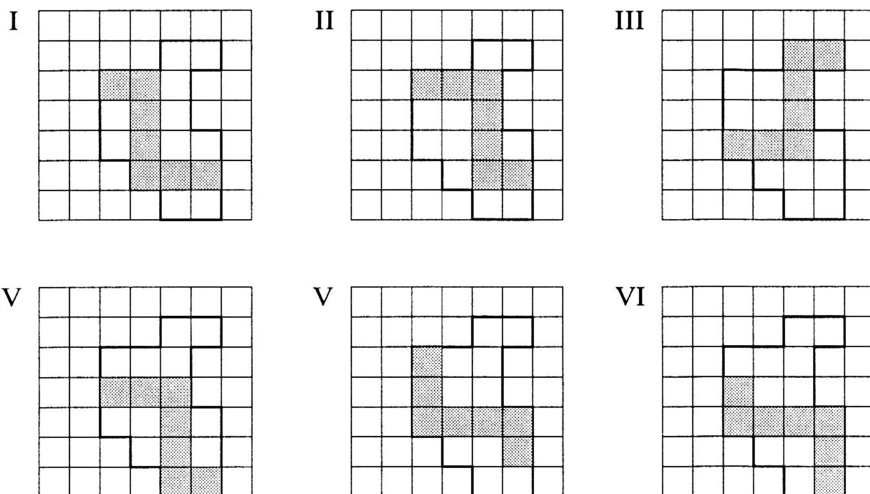
4



5



Prie padėties 1 dviejų langelių atšaką galima prilipdyti tik nuo apačios į dešinę — gauname I iš žemiau pavaizduotų šešių padėčių. Prie stulpo 2 didesnę atšaką tenka lipdyti viršuje į kairę — gauname II padėtį. Prie stulpo 3 didesnę atšaką prisieina lipdyti apačioje į kairę — gauname III padėtį. Prie stulpo 4 didesnę atšaką lipdome viršuje į kairę — gauname IV padėtį. Prie stulpo 5 atšakas galima lipdyti bet kaip: vieną į viršų, kitą į apačią — gauname V ir VI padėtis.



Dabar užbaigti sprendimą paprasta: kiekvienoje iš likusių neužtušuotų iškarpos vietų yra mažiau kaip 8 langeliai, todėl figūra 4, turinti 8 langelius, niekur tilpti nebegali.
Teisingas atsakymas **C**.
Žinoma, sprendimą galima užbaigti ir kitais žodžiais: galima įsitikinti, kad bet kaip padėta figūra 1 iškirptą sritį dalija į dvi nesusisiekiančias (matematikai sakytų: nesusijusias) sritis.

!!! Žinoma, sunkiausia skaitant sąlygą ir yra suvokti, kad figūras galima vartyti. Lietuviškajame variante tai padaryta taip: pasakyta, kad figūros iškirptos iš languoto sąsiuvinio lapo, o languoto sąsiuvinio lapo abi pusės vienodos — kvadratėliai sutampa. Kitų valstybių konkursuose nebuvo net kalbama apie languotą sąsiuvinio lapą, taigi susiprotėti, kad figūrą galima vartyti, buvo dar sunkiau.

B23. Ⓑ

? Kadangi skaitmeniu 8 pasibaigiantis skaičius gali būti tik lentelės dešiniajame krašte, tai neįmanomas paveikslėlis **B**.
Renkamės atsakymą **B**.

0	2	4	6	8
1	3	5	7	9
10	12	14	16	18
11	13	15	17	19
20	22	24	26	28
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

! Nesunku įsitikinti, kad Valdo lentelėje visi kiti fragmentai yra. Pavyzdžiui, fragmentas **A**, papildytas skaičiais 67, 69 ir 78, yra lentelės 13, 14 ir 15 eilutėse. Taip pat nesunku nustatyti, kur yra fragmentai **C**, **D**, **E**.

A

		68
65	67	69
		78

C

43	45		
	54	56	
		57	59

D

		57	59
	64	66	
63	65		

E

43		
52	54	56
53		

Teisingas atsakymas **B**.

B24. Ⓓ

Žr. uždavinio M22 sprendimą.

B25. Ⓓ 6

! Trikampį sudaryti galima tik tada, kai dviejų mažesniųjų atkarpų suma yra didesnė už trečiąją. Todėl iš karto atkrenta variantas 1, 2, 3. Vadinasi būtinai tame trikampyje turi būti kraštinė, didesnė už 2000.
Dvi mažosios (iš 1, 2, 3) kraštinės netinka, nes net $2 + 3 < 2000$. Todėl būtinai bus bent dvi kraštinės, didesnės už 2000.
Visos trys didžiosios kraštinės tinka, ir turime trejetą (2001, 2002, 2003).
Jei į trejetą įeina dvi iš didžiausiųjų — 2001 ir 2002, tai kaip trečia tinka ir 2, ir 3, tad gauname trejetus (2, 2001, 2002) ir (3, 2001, 2002). Jei į trejetą įeina 2001 ir 2003, tai kaip trečia tinka tik 3, ir gauname trejetą (3, 2001, 2003).
Pagaliau jei į trejetą įeina 2002 ir 2003, tai tinka ir 2, ir 3, — gauname trejetus (2, 2002, 2003) ir (3, 2002, 2003).
Iš viso gavome 6 trejetus.
Teisingas atsakymas **D**.

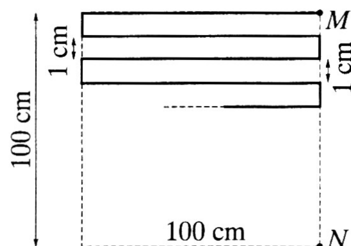
B26. Ⓒ 8

! Raudonų slibinų skaičių pasižymėkime r, žalių — z. Tada pagal sąlygą $2r + 4z = 44$, $6z + 6 = 6r$. Iš čia $r + 2z = 22$ ir $r = z + 1$. Todėl $z = r - 1$, ir $r + 2(r - 1) = 22$, $3r = 24$, $r = 8$.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Raudonas slibinas turi tiek galvų (šešias), kiek žalias — kojų. Kadangi žalių kojų buvo šešiomis mažiau, tai žalių slibinų buvo vienu mažiau. Pridėkime mintyse vieną žalią slibiną. Tada uodegų būtų 48, slibinų būtų po lygiai, o kadangi slibinų pora turi 6 uodegas, tai, pridėjus žalią slibiną, porų būtų $48 : 6 = 8$. Vadinasi, yra 8 raudoni slibinai.

B27. Ⓓ 10 100

! Lengva suvokti, kad „nukristi“ turime 100 cm. Sunkiau suskaičiuoti, kiek bus horizontalių linijų (100 ar 101). Taškas M yra 100 cm aukštyje virš pagrindo. Kai padarysime „ėjimą“ kairėn-žemyn-



dešinėn-žemyn, atsidursime po tašku M 98 cm aukštyje. Vadinasi, po 49 tokių ėjimų atsidursime $100 - 49 \cdot 2 = 2$ cm aukštyje. Vėl pakartoję kelią kairėn-žemyn-dešinėn-žemyn jau pateksime į tašką N. Vadinasi, horizontalios linijos eis 1, 2, ..., 99, 100 cm aukštyje. Jų bendras ilgis yra $100 \cdot 100$ cm, o visos linijos, jungiančios M su N, ilgis yra $100 \cdot 100 + 100 = 101 \cdot 100 = 10\,100$ cm.
Teisingas atsakymas **D**.

B28. Ⓑ 7

! Iš karto aišku, kad kvadratukas reiškia 6: jeigu jis reikštų 5 ar mažiau, tai suma būtų mažesnė už $600 + 600 + 600 = 1800$, o jeigu jis reikštų 7 ar daugiau, tai suma būtų didesnė už $700 \cdot 3 = 2100$. Turime

$$\begin{array}{r} 6\;6\;6 \\ +\;6\;6\bigcirc \\ 6\triangle\triangle \\ \hline 2\;0\;0\;3 \end{array}$$

Kadangi iš trečio stulpelio į antrą ateina 1 arba 2 mintyse, tai $\triangle$ negali būti didesnis už 7. Bet tada $\bigcirc + \triangle < 17$, ir iš trečio stulpelio matome, kad $\bigcirc + \triangle = 7$. Vadinasi, į antrą stulpelį ateina mintyse 1, todėl $\triangle = 7$, o tada $\bigcirc = 0$. Gauname

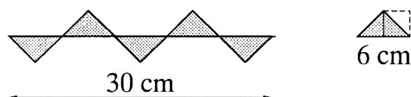
$$\begin{array}{r} 6\;6\;6 \\ +\;6\;6\;0 \\ 6\;7\;7 \\ \hline 2\;0\;0\;3 \end{array}$$

Teisingas atsakymas **B**.

!! Galima rašyti ir lygtį: pažymėję kvadratuką x, trikampuką y, o skrituliuką z, turime $111x + 110x + z + 100x + 11y = 2003$, $321x + 11y + z = 2003$.
Matome, kad $321x + 99 + 9 \geqslant 2003$, $321x \geqslant 1995$, $x \geqslant 6$. Kita vertus, $321x \leqslant 2003$, $x < 7$. Taigi $x = 6$, ir $11y + z = 77$.
Kadangi z skaitmuo ir dalijasi iš 11, tai $z = 0$, o tada $y = 7$. Taigi $x + z = 6$.

B29. Ⓓ 45

! Apskaičiuokime vieno trikampio plotą. Jo įžambinė lygi $30 : 5 = 6\,\text{cm}$.



Padaliję trikampį aukštine pusiau, matome, kad jo plotas lygus plotui kvadrato, kurio kraštinė lygi 3 cm, t. y. trikampio plotas lygus $9\,\text{cm}^2$. Vadinasi, užtušuotos figūros plotas lygus $9 \cdot 5 = 45\,\text{cm}^2$.
Teisingas atsakymas **D**.

B30. Ⓑ 3

! Kadangi iš 4 pieštukų bent 2 yra tos pačios spalvos, tai spalvų yra ne daugiau kaip 3 (priešingu atveju paimtume po 1 pieštuką kiekvienos iš keturių spalvų). Toliau, nėra 4 vienos spalvos pieštukų (tada paimtume tuos keturis ir dar vieną). Vadinasi, kiekvienos spalvos pieštukų yra ne daugiau kaip 3.
Kadangi pieštukų yra 9, spalvų ne daugiau kaip 3, o kiekvienos spalvos pieštukų yra ne daugiau kaip 3, tai aišku, jog spalvų yra 3, o kiekvienos spalvos pieštukų yra 3 (iš tikrųjų, jeigu kurios nors spalvos pieštukų būtų $\leqslant 2$, tai iš viso turėtume $\leqslant 2 + 3 + 3$ pieštukų).
Kadangi mėlynos spalvos pieštukų pagal sąlygą tikrai yra, tai jų yra lygiai 3.
Teisingas atsakymas **B**.

KADETAS (VII ir VIII klasės)

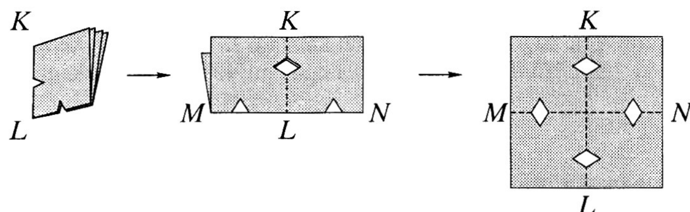
K1. Ⓔ 10 000

? Galima tikrinti atsakymus. Kadangi vidutinė kaina sumažėjo, tai brangiausia papūga kainavo daugiau kaip 6000 litų. Vadinasi, parduotoji papūga kainavo daugiau kaip 6000 litų, o pagal atsakymus — 10 000.
Renkamės atsakymą **E**.

! Iš pradžių visos papūgos kainavo $5 \cdot 6000 = 30\,000$ litų. Kai pardavė papūgą už 10 000 litų, likusios kainavo 20 000 Lt, o vidutinė jų kaina pasidarė $20\,000 : 4 = 5000$ Lt.
Teisingas atsakymas **E**.

K2. Ⓒ

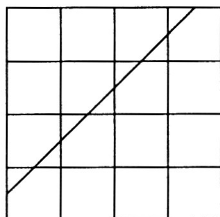
? Galima samprotauti taip. Kadangi servetėlės centras atitinka kairiojo paveikslėlio tašką L, o tas taškas neiškirptas, tai atsakymas **E** netinka. O dabar pastebėkime, kad iškirptų lygių kampų smailumos nukreiptos į skirtingas kvadrato kraštines. Iš atsakymų **A**, **B**, **C**, **D** taip yra tik atsakyme **C**.
Renkamės atsakymą **C**.



! Atlankstykime servetėlę. Nesunku suvokti, kad po pirmo atlenkimo gauname figūrą, pavaizduotą viduriniame paveikslėlyje, o po antro — figūrą, pavaizduotą dešiniajame paveikslėlyje, t. y. figūrą, nurodytą atsakyme **C**.
Teisingas atsakymas **C**.

K3. Ⓓ 7

? Jaučiame, kad geriausia kirsti kvadratą, kaip tat parodyta piešinyje.

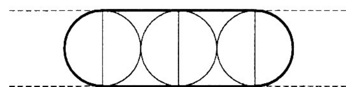


Suskaičiavę gauname 7 perkirstus kvadratėlius.
Renkamės atsakymą **D**.

! Skaičiuokime langelius taip: į naują langelį patenkame tik perkirtę horizontalę arba vertikalę. Kol pasiekiame kvadrato kraštą, kertame daugiausiai 3 vertikales ir 3 horizontales, taigi turime pradinį langelį ir dar daugiausiai 6, į kuriuos įeiname. Kad 7 langelius kirsti įmanoma, rodo piešinys.
Teisingas atsakymas **D**.

K4. Ⓒ $a + 2b$

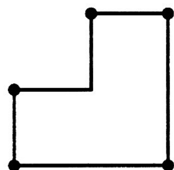
! Siūlas apjuosia du kvadratus ir du pusskritulius:



Todėl siūlo apjuosiamos srities plotas lygus $a + 2b$.
Teisingas atsakymas **C**.

K5. Ⓓ 5

? Greitai pavyksta nusibraižyti šešiakampį, turintį 5 stačiuosius vidinius kampus. Nusibraižyti šešiakampio, turinčio 6 stačiuosius vidinius kampus, nepavyksta.



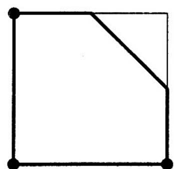
Renkamės atsakymą **D**.

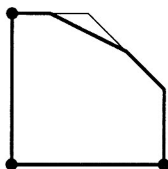
! Įrodysime, kad šešiakampyje gali būti daugiausiai 5 statieji vidiniai kampai. Iš tikrųjų, šešiakampio visų kampų suma lygi $180°(6-2) = 720°$. Todėl jei jis turi 5 kampus po $90°$, tai šeštas kampas lygus $720° - 5 \cdot 90° = 270°$.
Teisingas atsakymas **D**.

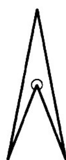
!! Įdomu nustatyti, kiek stačiųjų vidinių kampų gali turėti n-kampis.
Iš pradžių imkime iškiluosius n-kampius.
Kadangi trikampio visų trijų kampų suma lygi $180°$, tai jis gali turėti tik vieną statųjį kampą (ir kartais jį turi).
Keturkampis gali turėti visus 4 stačiuosius kampus — tai stačiakampis. (Įdomus šuolis — trikampis daugiausiai turi 1 statųjį kampą, keturkampis — net 4.)
Penkiakampio kampų suma lygi $180°(5-2) = 540°$. Visi penki kampai negali būti statūs, nes $5 \cdot 90 \neq 540$. Jeigu 4 kampai būtų statūs, tai penktas kampas būtų lygus $540° - 360° = 180°$, o toks kampas nebūna.
Panašiai samprotaujame ir toliau. Imkime n-kampį ($n \geqslant 6$), jo kampų suma lygi $180°(n-2)$. Visi kampai negali būti statūs, nes tada būtų $90°n = 180°(n-2)$, $n = 2(n-2)$, $n = 4$. Sakykime, kad jis turi k stačiųjų kampų ir $n-k$ ($\geqslant 1$) nestačiųjų kampų. Kadangi iškilojo daugiakampio kampai mažesni už $180°$, tai

$$180°(n-k) + 90°k > 180°(n-2), \qquad 2(n-k) + k > 2(n-2),$$

t. y. $k < 4$. Vadinasi, iškilasis n-kampis ($n \geqslant 5$) gali turėti daugiausiai 3 stačiuosius kampus.
Paprasta įsitikinti, kad iškilasis n-kampis ($n \geqslant 5$) iš tikrųjų gali turėti 3 stačiuosius kampus.
Imkime kvadratą ir nukirpkime vieną jo kampą per kraštinių vidurius (žr. kairiuosius brėžinius).



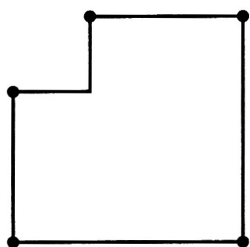


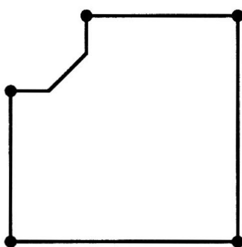


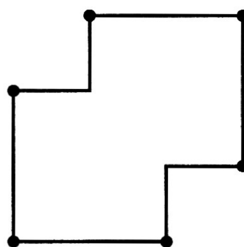
Gavome penkiakampį su 3 stačiaisiais kampais. Dabar nukirpkime vieną nestatųjį jo kampą per jį sudarančių kraštinių vidurius — gauname šešiakampį su 3 stačiaisiais kampais. Aišku, kad šią nestačiųjų kampų skaičiaus didinimo procedūrą galima tęsti iki bet kurio n.
Pereikime prie bet kurių (nebūtinai iškilų) n-kampių. Skirtumas čia tas, kad neiškilojo daugiakampio vidinis kampas gali būti ir didesnis už 180°; jis mažesnis už 360°, bet gali būti kiek norima artimas 360° net keturkampyje (žr. dešinį brėžinį).
Trikampių neiškilųjų nebūna, todėl trikampiai, kaip jau įsitikinome, gali turėti daugiausiai vieną statųjį kampą. Stačiakampiai jų turi net keturis. Penkiakampio atveju senasis samprotavimas tinka, todėl penkiakampis turi daugiausiai 3 stačiuosius kampus.
Taigi imkime $n \geqslant 6$. Kadangi ir neiškilojo n-kampio vidaus kampų suma lygi $180°(n-2)$, tai jau matėme, kad jis turi ir nestačiųjų kampų. Jeigu stačiųjų kampų yra k, o nestačiųjų $n-k$, tai

$$360°(n-k)+90°k > 180°(n-2), \quad 4(n-k)+k > 2n-4, \quad 3k < 2n+4.$$

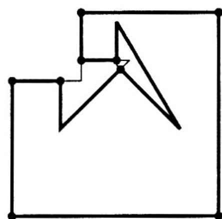
Vadinasi, $3k \leqslant 2n+3$, $k \leqslant \left[\frac{2n}{3}\right]+1$.
Pavyzdžiais pademonstruosime, kad reikšmė $\left[\frac{2n}{3}\right]+1$ įgyjama. Vadinasi, n-kampis ($n \geqslant 6$) daugiausiai gali turėti $k_{\max} = \left[\frac{2n}{3}\right]+1$ statųjį kampą. Tai galima užrašyti ir be sveikosios dalies ženklo ($m \in N$): jeigu $n = 3m+3$, tai $k_{\max} = 2m+3$; jeigu $n = 3m+4$, tai $k_{\max} = 2m+3$; jeigu $n = 3m+5$, tai $k_{\max} = 2m+4$.
Iš tikrųjų, kai $m = 1$, tai viskas aišku: pavyzdžiai rodo, kad kai $n = 6$, tai $k_{\max} = 5$; kai $n = 7$, tai $k_{\max} = 5$; kai $n = 8$, tai $k_{\max} = 6$ (juodais skrituliukais pažymėtos vidinių stačiųjų kampų viršūnės).

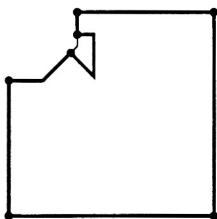

$n = 6$

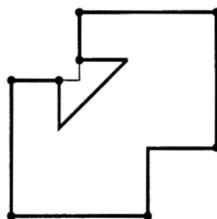

$n = 7$

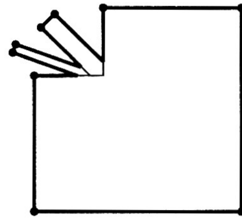

$n = 8$

Dabar užtenka parodyti, kaip konstruojami daugiakampiai, kurie, padidinus viršūnių skaičių trimis, turi dviem stačiaisiais kampais daugiau. Pavyzdžiui, galima imti kampą > 180° ir iškirpti prie jo viršūnės iš daugiakampio „trikampį be viršūnės“, o procedūrą tęsti mažinant trikampius (žr. tris kairiuosius paveikslėlius).


$n = 3m + 3$


$n = 3m + 4$


$n = 3m + 5$



Galima ir pripiešinėti prie kampų > 180° viršūnių iš išorės „nudrožtą pieštuką“ (žr. dešinį paveikslėlį).
Taigi neiškilasis n-kampis ($n \geqslant 6$) turi daugiausia $\left[\frac{2n}{3}\right]+1$ statųjį kampą.

K6. Ⓑ 4

! Pažymėkime ąsočio talpą a, butelio b, stiklinės s, bokalo k. Pagal sąlygą $a = b + s$, $b = s + k$, $3k = 2a$. Todėl $3k = 2a = 2b + 2s = 2s + 2k + 2s$, t. y. $3k = 4s + 2k$, arba $k = 4s$.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Galima lygtis parašyti taip: $2a = 2b + 2s$, $2b = 2s + 2k$, $3k = 2a$. Jas sudėję, iš karto gauname $k = 4s$.
Beje, ne pro šalį sprendinį patikrinti. Randame, kad $a = 6s$, tada $b = 5s$, ir visos uždavinio sąlygos išpildytos.

!!! Žinoma, įmanoma sprendimą užrašyti ir be lygčių. Kadangi į ąsotį telpa butelis ir stiklinė, o į butelį — stiklinė ir bokalas, tai į ąsotį telpa bokalas ir 2 stiklinės. Vadinasi, į 2 ąsočius telpa 2 bokalai ir 4 stiklinės. Bet tai yra tiek pat, kiek ir 3 bokalai, todėl bokalas yra 4 stiklinės.

K7. Ⓑ 16

! Kaip ir uždavinyje M24, aišku, kad visas „sąsmaukas“ uždengiame vieninteliu būdu — neįlįsdami į kvadratų vidų. Iš tikrųjų, sakykime, pavyzdžiui, kad įsibrovėme į kairįjį viršutinį kvadratą iš dešinės. Tada jame liko 7 neuždengti kvadratėliai. Jų skaičius nelyginis, todėl reikia dar įsibrauti į minėtą kvadratą iš apačios. Bet tada to kvadrato dešinysis apatinis kampas lieka neuždengtas.
Liko uždengti kvadratus. Kiekvieną kvadratą galima uždengti dviem būdais: pavyzdžiui, minėto kvadrato kairįjį viršutinį langelį galima dengti horizontaliu kauliuku arba vertikaliu kauliuku, o po to kiti kauliukai savo vietas užima automatiškai.
Vadinasi, 4 kvadratus galima uždengti $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ būdų.
Teisingas atsakymas **B**.

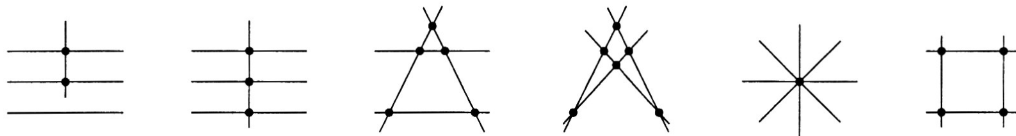
K8. Ⓓ 19

? Nepanašu, kad nubraukus paskutinį skaitmenį, skaičius sumažėtų 20 kartų — juk tada pradinis skaičius baigtųsi nuliu ir sumažėtų tik 10 kartų. O štai paėmus 19 ir nubraukus 9 lieka 19 kartų mažesnis skaičius.
Renkamės atsakymą **D**.

! Sakykime, kad skaičius yra $n = \overline{xy} = 10x + y$. Nubraukus paskutinį skaitmenį, jis tampa x. Gauname $nx = 10x + y$, $(n - 10)x = y$. Kadangi $y \leqslant 9$, $x \geqslant 1$, tai $n - 10 \leqslant 9$, $n \leqslant 19$. Šis įvertis pasiekiamas — užtenka imti $x = 1$, $y = 9$. Iš tikrųjų, $19 : 1 = 19$.
Teisingas atsakymas **D**.

K9. Ⓔ 7

? Kengūriškas atsakymas paprastas: kadangi pavyzdžiai rodo, jog gali būti 2, 3, 5, 6 susikirtimo taškai, tai renkamės atsakymą **E**.



! Atkarpos taip pat gali turėti 1 ir 4 susikirtimo taškus. O štai 7 taškų turėti jos negali: net 4 tiesės (ką jau tada šnekėti apie atkarpas) gali turėti tik 6 susikirtimo taškus. Iš tikrųjų, kiekviena tiesių pora gali turėti daugiausiai vieną susikirtimo tašką. Kadangi iš 4 tiesių a, b, c, d galima sudaryti tik 6 poras ab, ac, ad, bc, bd, cd, tai susikirtimo taškų gali būti daugiausiai 6.
Teisingas atsakymas **E**.

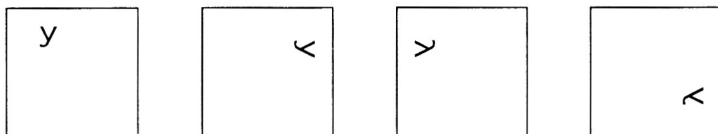
K10. Ⓒ 3125

! Padauginę 768 iš 2500 gauname $A = 768 \cdot 2500 = 384 \cdot 5000 = 1\,920\,000 = ...20\,000$, t. y. 4 nulius (nerašome pirmųjų skaitmenų). Taip pat 4 nulius duos daugyba iš 5000 — nes $2A = ...40\,000$, iš 7500 — nes $3A = ...60\,000$, daugyba iš 10 000 — nes $4A = ...80\,000$. O štai daugyba iš 3125 duoda penkis nulius: $768 \cdot 3125 = 384 \cdot 6250 = 192 \cdot 12\,500 = 96 \cdot 25\,000 = 48 \cdot 50\,000 = 24 \cdot 100\,000$. Teisingas atsakymas **C**.

!! Nulių skaičių lemia tai, kiek dvejetų ir penketų porų įeina į sandaugą. Kadangi $768 = 2^8 \cdot 3$, $2500 = 5^4 \cdot 2^2$, $5000 = 5^4 \cdot 2^3$, $7500 = 5^4 \cdot 2^2 \cdot 3$, $10\,000 = 5^4 \cdot 2^4$, $3125 = 5^5$, tai iš tikrųjų sandaugos nulių skaičių lemia penketuko laipsnis. Vadinasi, daugindami 3125, gauname daugiausiai nulių — penkis.

K11. Ⓐ

? Paprasčiausia paimti ploną popieriaus lapą, nupiešti tą raidę ryškiai, kad ji matytųsi iš kitos pusės (pavyzdžiui, prieš langą), ir atlikti su lapu nurodytus veiksmus. (Beje, tai prieš langą įmanoma atlikti su pačiu užduoties lapeliu.)
Gauname atsakymą **A**.



! Galima pavaizduoti visas raidės padėtis. Pasukę lapą 90° pagal laikrodžio rodyklę, gausime antrą paveikslėlį. Pervertę per kairįjį jo kraštą, gausime trečią paveikslėlį. Pagaliau pasukę lapą 180°, gauname ketvirtą paveikslėlį. Matome, kad jame raidės padėtis tokia, kaip atsakyme **A**.
Teisingas atsakymas **A**.

K12. Ⓒ 3

? Galima pradėti nuo atsakymų. Jei imame **C**, aukštį 3 cm, tai apatiniame, pagrindo sluoksnyje bus $42 : 3 = 14$ kubelių. Vadinasi, pagrinde gali būti tik stačiakampis 1×14 arba 2×7. Pirmo stačiakampio perimetras 30, antro — 18, kaip ir turi būti.
Renkamės atsakymą **C**.

! Kadangi kubelio briauna lygi 1 cm, tai stačiakampio gretasienio ilgis x cm, plotis y cm ir aukštis z cm yra natūralieji skaičiai. Pagal sąlygą tūris $xyz = 42$, perimetras $2x + 2y = 18$. Vadinasi, $x + y = 9$, ir kadangi natūralu laikyti ilgį didesniu už plotį, tai tinka tik poros $(x, y) = (5, 4)$, $(6, 3)$, $(7, 2)$, $(8, 1)$. Iš jų tik pora $(7, 2)$ duoda natūraliąją z reikšmę: $z = 42 : (x \cdot y) = 42 : (7 \cdot 2) = 3$. Vadinasi, Mykolo sudėto stačiakampio gretasienio aukštis yra 3 cm.
Teisingas atsakymas **C**.

K13. Ⓒ 36

? Pirmame ir antrame taikinyje Lukas po 2 kartus pataikė į kiekvieną iš trijų zonų ir surinko $29 + 43 = 72$ taškus. Vadinasi, pataikius po vieną kartą į kiekvieną zoną surenkami 36 taškai. Būtent tiek ir surinko Lukas ketvirtame taikinyje. Beje, trečio taikinio rezultatų mums nė neprireikė.
Renkamės atsakymą **C**.

! Ne pro šalį patikrinti, ar situacija įmanoma. Pažymėję zonų taškus a, b ir c, gauname $2b + c = 29$, $2a + c = 43$, $2a + b = 47$. Sudėję I ir III lygtis ir atėmę II, gauname $3b = 33$, $b = 11$, todėl $c = 7$, $a = 18$. Matome, kad uždavinio sąlygos išpildytos, ir ketvirtame taikinyje Lukas išmušė 36 taškus.
Teisingas atsakymas **C**.

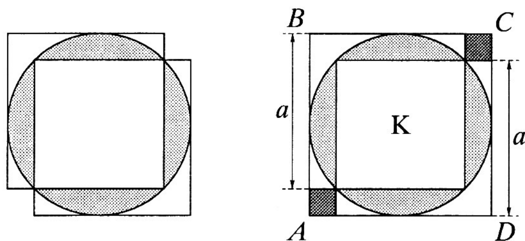
K14. Ⓔ 75%

! Tegu x kg — pradinė krovinio kaina. Pagal sąlygą $x = 0{,}8(2000 + x)$, arba $5x = 4(2000 + x)$, iš čia $x = 8000$ kg. Vadinasi, po pirmo sustojimo krovinio liko $8000 \cdot \frac{3}{4} = 6000$ kg, ir jis palyginus su bendra sunkvežimio ir krovinio mase sudaro $\frac{6000}{2000+6000} \cdot 100 = \frac{3}{4} \cdot 100 = 75\%$.
Teisingas atsakymas **E**.

!! Įdomu, kad sunkvežimio masės nereikia nė žinoti. Iš tikrųjų, tegu y — sunkvežimio masė, x — pradinė krovinio masė. Pagal sąlygą $x = 0{,}8(x + y)$, iš kur $y = x/4$. Po pirmo sustojimo krovinys svėrė $3x/4$, todėl jis palyginti su bendra sunkvežimio ir to likusio krovinio mase sudaro $(3x/4) : (y + 3x/4) = (3x/4) : (x/4 + 3x/4) = 3/4$, t. y. 75%.

K15. Ⓓ $9(\pi - 2)$

? Panašu, kad viduryje neužtušuota figūra (žr. kairįjį paveikslėlį) yra kvadratas, kurio įstrižainė lygi skritulio skersmeniui, t. y. 6. Vadinasi, skritulio plotas lygus 9π, kvadrato plotas 18 (nes jį įstrižainės dalija į 4 stačiuosius trikampius, kiekvieno iš kurių plotas $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3$), o užtušuotos srities plotas $9\pi - 18 = 9(\pi - 2)$.
Renkamės atsakymą **D**.



! Įrodysime, kad vidurinis neužtušuotas stačiakampis K — iš tikrųjų kvadratas. Abiejų lygių kvadratų kraštinės ilgį pažymėkime a cm. Pratęskime jų kraštines (žr. dešinįjį paveikslėlį). Kadangi į keturkampį $ABCD$ įbrėžtas skritulys, tai $ABCD$ — kvadratas (jo kraštinė — tai skritulio skersmuo, taigi pagal sąlygą lygi 6 cm). Kadangi mažųjų stačiakampių prie viršūnių A ir C kraštinės lygios $6 - a$, tai jie — kvadratai. Bet tada stačiakampio K kraštinės lygios $a - (6 - a) = 2a - 6$, taigi jis — kvadratas. Plotus jau suskaičiavome anksčiau.
Teisingas atsakymas **D**.

K16. Ⓓ 6
Žr. uždavinio B25 sprendimą.

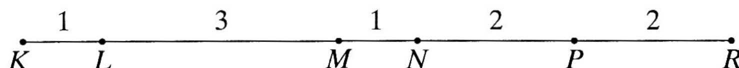
K17. Ⓒ 2

! Mažiausias skaičiaus n daliklis, nelygus vienetui — tai mažiausias pirminis p, iš kurio dalijasi n. Jeigu skaičius n dalijasi iš d, tai jis dalijasi ir iš $\frac{n}{d}$ (iš tikrųjų, $n : \frac{n}{d} = d$). Kadangi p — mažiausias daliklis, tai $\frac{n}{p}$ — didžiausias. Pagal sąlygą $\frac{n}{p} = 15p$, t. y. $n = 15p^2$. Matome, kad n dalijasi iš 3, todėl p (būdamas mažiausias daliklis) turi tenkinti sąlygą $p \leqslant 3$. Vadinasi, arba $p = 2$, arba $p = 3$, taigi yra du skaičiai, tenkinantys uždavinio sąlygą: $n = 60$ ir $n = 135$.
Teisingas atsakymas **C**.

K18. Ⓓ $KL = MN$

? Pagal sąlygą atkarpos KN ir MR lygios. Todėl atmetę iš jų bendrą atkarpą MN, gauname $KM = NR$. Kita vertus, pagal sąlygą ir $LN = NR$, taigi $KM = LN$. Atmetę iš pastarųjų atkarpų bendrą dalį LM, gauname $KL = MN$.
Renkamės atsakymą **D**.

! Dar reikėtų įsitikinti, kad kiti atsakymai teisingi nevisada. Tam užtenka pateikti pavyzdį.



Teisingas tik atsakymas **D**.

K19. Ⓒ 4

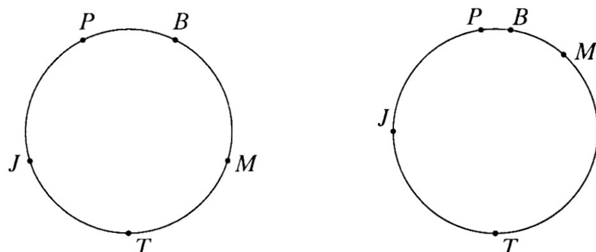
? Kadangi lygių sumų daug, tai spėjame, kad ir kortelėse „daug“ lygių skaičių. Kadangi 3 vienodų skaičių suma lygi 18, tai spėjame, kad yra bent 3 kortelės su skaičiumi 6. Kadangi dar yra suma 16, tai turėtų būti kortelė su skaičiumi 4. Bet jei kortelių su skaičiumi 4 būtų dvi, tai susidarytų ir suma $4+4+6=14$. Lieka patikrinti, ar uždavinio sąlygos išpildytos, jeigu yra penkios kortelės su skaičiumi 6 ir tik viena su skaičumi 4.
Renkamės atsakymą **C**.

! Kadangi ne visos Marytės sumos lygios, tai ne visi kortelėse parašyti skaičiai lygūs. Bet trijų skirtingų skaičių kortelėse būti negali. Iš tikrųjų, tarkime priešingai, kad yra bent trys skirtingi skaičiai $a<b<c$. Tada $a+b<a+c<b+c$. Paėmę dar vieną kortelę (sakykime, joje parašytas skaičius x) gautume nelygias sumas $a+b+x$, $a+c+x$, $b+c+x$. Vadinasi, iš tikrųjų kortelėse yra tik 2 skirtingi skaičiai — a ir b.
Įsitikinkime, kad vienas iš skaičių parašytas tik vienoje kortelėje. Jeigu būtų ne taip, tai turėtume korteles su skaičiais a, a, b, b, b. Tada sumos $2a+b$, $2b+a$ ir $3b$ skirtingos, o tai prieštarauja sąlygai.
Taigi kortelėse parašyti skaičiai — tai a, b, b, b, b, b. Ir iš tikrųjų, visos galimos trijų kortelių skaičių sumos įgyja tik dvi reikšmes po 10 kartų: $a+2b$ ir $3b$. Kadangi pagal sąlygą skaičiai a ir b natūralieji, tai $3b$ dalijasi iš 3, vadinasi, ta suma 18. Todėl $3b=18$, iš kur $b=6$. Taigi $a=16-2b=16-12=4$. Vadinasi, mažiausias kortelėse parašytas skaičius yra 4.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Iš pateikto sprendimo matome, kad sąlygoje visai nebūtina reikalauti, kad kiekvieną iš reikšmių 16 ir 18 įgytų lygiai po 10 sumų — užtenka reikalauti, kad sumos įgytų tik šias dvi reikšmes.
Beje, jeigu nereikalautume, kad skaičiai kortelėse būtų sveiki, tai gautume dar vieną sprendinį: $3b=16$, $a+2b=18$, taigi $a=\frac{22}{3}$, $b=\frac{16}{3}$.

K20. Ⓒ Mykolas ir Tomas stovi greta

? Kadangi Pauliaus (P) ir Barto (B) vardai buvo ištarti po 2 kartus, tai spėjame, kad Paulius ir Bartas stovi greta. Pabandykime imti padėtį, kai Mykolas (M) ir Tomas (T) stovi greta (paveikslėlis kairėje; jei nepavyktų — bandytume juos statyti negreta). Dabar aišku, ką reikia daryti: pastumti M toliau nuo T, kad T ištartų Jono (J) vardą. Perdarome paveikslėlį į dešinįjį. Tada J ir B ištaria P vardą, P ir M ištaria B vardą, o T ištaria J vardą, ir uždavinio sąlygos išpildomos.
Renkamės atsakymą **C**.



! Jeigu Paulius ir Bartas nestovėtų greta, tai Paulius ištartų ne Barto vardą, o Bartas — ne Pauliaus. Vadinasi, bent du kartus būtų buvęs ištartas ne Barto ar Pauliaus vardas. Bet pagal sąlygą toks vardas buvo ištartas tik vieną kartą. Taigi Paulius ir Bartas stovi greta.
Dabar aišku, kad Mykolas ir Tomas stovi greta — kitaip jie abu būtų Jono kaimynai. Tada Jonas būtų ištaręs arba Mykolo, arba Tomo vardą, o pagal sąlygą nė vienas šių vardų nebuvo ištartas.
Dar turime įsitikinti, kad aprašytoji situacija įmanoma, bet tai įrodo dešinysis paveikslėlis.
Teisingas atsakymas **C**.

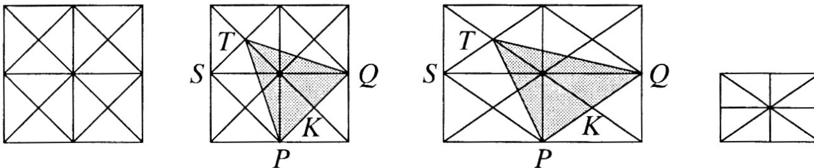
!! Iš sprendimo matome, kad atsakymas **C** bus teisingas ir bendresnėje situacijoje — kai kiekvienas berniukas gali sakyti bet kurio savo kaimyno vardą (o nebūtinai artimiausio).

K21. Ⓓ

Žr. uždavinio M22 sprendimą.

K22. Ⓑ $\frac{1}{4}$

? Atspėti atsakymą lengva — imame kvadratą (juk neuždrausta) ir sudalijame jį į 16 lygių trikampių, kaip parodyta kairiajame brėžinyje. Vieno trikampio plotas lygus $\frac{1}{16}$ (laikome, kad kvadrato plotas lygus 1), o stačiakampio $TKPS$ plotas lygus $4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$. Todėl trikampio TKP plotas lygus pusei to ploto, t. y. $\frac{1}{8}$. Vadinasi, dvigubai didesnis trikampio PQT plotas lygus $\frac{1}{4}$.
Renkamės atsakymą **B**.

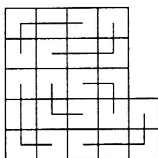


! Iš esmės niekas nesikeičia, jei nagrinėjame (ploto 1) stačiakampį — tik tiek, kad dabar trikampukai nėra lygūs, bet vis tiek lygiapločiai (pavyzdžiui, todėl, kad kiekvienas jų sudėtas iš dviejų lygių trikampukų) — žr. dešinį paveikslėlį. Lygiagretainį sudaro 4 trikampukai, jo plotas $4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$. Trikampis TKP yra pusė lygiagretainio $TKPS$, todėl jo plotas $\frac{1}{8}$. Lygiai taip pat įrodome, kad trikampio TKQ plotas lygus $\frac{1}{8}$. Vadinasi, trikampio PQT plotas lygus $\frac{1}{4}$.
Teisingas atsakymas **B**.

K23. Ⓑ 2

! Labai lengva sudėti figūrą, jei fragmentus galima vartyti, ir tam tereikia dviejų trikvadračių fragmentų. Bet vartyti negalima, todėl sudėti figūrą panaudojant trikvadračius fragmentus daug sunkiau. Bet svarbiausia — net sudėjus figūrą su 2 trikvadračiais, dar neaišku, ar negali užtekti vieno (gal nereikės nė vieno) trikvadračio. Vis dėlto nesunku įsitikinti, kad 0 ar 1 trikvadračio neužteks: kadangi figūroje 22 langeliai, tai neimant trikvadračių liktų visi 22 langeliai keturkvadračiams, bet 22 iš 4 nesidalija. Negali būti ir 1 trikvadračio — tada liktų 19 langelių. Ir tik jei imsime 2 trikvadračius, tai keturkvadračiams liks 16 langelių, ir yra vilties, kad iš 2 trikvadračių ir 4 keturkvadračių figūrą sudėti pavyks. Beje, neįmanoma sudėti figūros imant 3 trikvadračius (lieka 13 langelių), 4 trikvadračius (lieka 10 langelių), 5 trikvadračius (lieka 7 langeliai), ir tik imant 6 trikvadračius lieka 4 langeliai vienam keturkvadračiui. Bet šiaip jau sunku patikėti, kad tai ir būtų atsakymas.

Vadinasi, tikimės, kad atsakymas yra 2 trikvadračiai, ir lieka pasistengti sugalvoti dėjinį. Beje, tikint, kad tai įmanoma, sudėlioti nėra sunku (žr. pavyzdį paveikslėlyje).



Teisingas atsakymas **B**.

!! Žinoma, galima užrašyti trikvadračių ir keturkvadračių kiekybių sąryšį lygtimi. Jeigu figūrą pavyko sudėti iš m trikvadračių ir n keturkvadračių fragmentų, tai $3m + 4n = 22$, ir aišku, kad n gali būti tik 4 (tada $m = 2$) arba 1 (tada $m = 6$). Didžiausias vargas vis tiek liko — reikia įsitikinti, kad iš 2 trikvadračių ir 4 keturkvadračių sudėti figūrą galima.

K24. Ⓓ 64

? Kadangi apie persiklojančias baltąsias dalis nieko nepasakyta, tai galima įsivaizduoti, kad jų plotai „kiek norint maži" (ar net lygūs 0). Tad spėjame, kad plotų skirtumas bus $11^2 + 7^2 - 9^2 - 5^2 = 11^2 - 9^2 + 7^2 - 5^2 = (11 - 9)(11 + 9) + (7 - 5)(7 + 5) = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 12 = 2 \cdot 32 = 64$.
Renkamės atsakymą **D**.

! Pažymėkime pilkųjų dalių bendrą plotą A, juodųjų — B, baltųjų — C. Tada suma $A + C$ lygi kvadratų su kraštinėmis 11 ir 7 plotų sumai, t. y. $A + C = 11^2 + 7^2$. Analogiškai $B + C = 9^2 + 5^2$. Todėl ieškomas skirtumas lygus $A - B = (A + C) - (B + C) = 11^2 + 7^2 - 9^2 - 5^2 = 64$.
Teisingas atsakymas **D**.

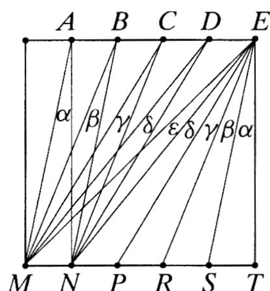
K25. Ⓒ Yra trys paeiliui stovinčios matematikos knygos

? Pabandykime sustatyti knygas taip: MMF MMF ... MMF MM. Tada sąlyga išpildyta, bet trijų iš eilės einančių matematikos knygų nėra.
Renkamės atsakymą **C**.

! Įrodysime, kad teiginiai **A**, **B**, **D**, **E** visada teisingi, kad ir kaip sustatytume knygas. Iš tikrųjų, pastebėkime, kad iš bet kurių 3 paeiliui stovinčių knygų fizikos knygų bus daugiausia viena (iš tikrųjų, jos negali stovėti greta, bet jeigu tai pirma ir trečia knygos, tai matematikos knyga neturi kaimyninės matematikos knygos). Aišku, ir iš 2 greta stovinčių knygų fizikos knygų daugiausiai viena. Suskirstykime iš eilės knygas į 16 trejetų ir paskutinę porą. Fizikos knygų bus ne daugiau kaip 17, todėl teiginys **B** teisingas. Bet iš viso knygų yra 50, todėl matematikos knygų ne mažiau kaip 33, taigi ir teiginys **A** teisingas.
Teisingas ir teiginys **D**. Iš tikrųjų sakykime, kad yra 17 fizikos knygų. Jeigu pirma knyga ne fizikos, o matematikos, tai ir jos kaimynė — matematikos knyga, o likusiuose 16 trejetų gali būti daugiausiai 16 fizikos knygų. Lygiai taip pat ir paskutinė knyga fizikos — skaičiuojame nuo galo. Taigi įsitikinome, kad jeigu fizikos knygų 17, tai ir pirma, ir paskutinė — fizikos. Vis dėlto verta patikrinti, ar iš viso tokia situacija įmanoma. Nuo 2-os iki 49 knygos yra 48 vietos, ir jose knygas galima statyti taip: MMF MMF ... MMF MMM. Tarp jų bus 15 fizikos knygų, taigi iš viso — 17.
Teisingas ir teiginys **E**: suskirstome tas devynias knygas į 3 trejetus, ir kadangi juose daugiausiai 3 fizikos knygos, tai devynete mažiausiai 6 matematikos knygos.
Vadinasi, atsakymai **A**, **B**, **D**, **E** visada teisingi. O štai atsakymas **C** kartais teisingas, kartais klaidingas (jau turėjome pavyzdį, kai 3 iš eilės matematikos knygų nėra, ir pavyzdį, kai yra).
Reikia rinktis atsakymą **C** — tik jis būna ir klaidingas, ir teisingas.

K26. Ⓑ 45°

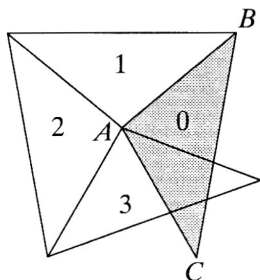
! Sąlygoje išvardytų kampų didumus pažymėkime $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, o taškų B, C, D, E projekcijas į tiesę MN — raidėmis P, R, S, T. Kadangi $AE = MS$, tai $AESM$ — lygiagretainis, ir $ES \parallel AM$, todėl $\angle TES = \alpha$. Panašiai $\angle SER = \beta$, $\angle REP = \gamma$, $\angle PEN = \delta$, todėl $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = \angle TEM = 45°$.



Teisingas atsakymas **B**.

K27. Ⓔ 18

! Trikampis su numeriu k sutaps su trikampiu 0, kai trikampių su numeriais 0, 1, 2, ..., $k-1$ kampų prie viršūnės A suma bus 360° kartotinis, t. y. kai $\frac{100k}{360} = \frac{5k}{18}$ bus sveikas skaičius. Mažiausias toks skaičius yra 18.



Teisingas atsakymas **E**.

K28. Ⓐ 22

! Jeigu 2003 dalydami iš n gauname liekaną 23, tai $2003 = k \cdot n + 23$, ir $23 < n$. Vadinasi, turi būti teisinga lygybė $kn = 1980$, ir $n > 23$. Taigi lieka atsakyti į klausimą — kiek yra skaičiaus 1980 daliklių, didesnių už 23. Vienoje eilutėje rašykime skaičiaus $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ daliklius didėjimo tvarka, o kitoje — mažėjimo tvarka:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 22, 30, 33, 36, 44, 45, 55, 60, 66, 90, \ldots,$$

$$\frac{1980}{1}, \frac{1980}{2}, \frac{1980}{3}, \ldots, \frac{1980}{33}, \frac{1980}{36}, \frac{1980}{44}, \frac{1980}{45}, \frac{1980}{55}, \frac{1980}{60}, \frac{1980}{66}, \frac{1980}{90}, \ldots$$

Matome, kad $\frac{1980}{66} = 30$, $\frac{1980}{90} = 22$, taigi didesni už 23 yra antroje eilutėje išrašyti dalikliai iki $\frac{1980}{66}$, o jų yra tiek pat, kiek daliklių pirmoje eilutėje iki 66 — būtent 22.
Teisingas atsakymas **A**.

K29. Ⓑ 25

? Nujaučiame, kad daugiausiai atkarpų gausime, jei imsime po 5 taškus kiekvienoje tiesės pusėje. Iš kiekvieno iš 5 taškų iš vienos tiesės pusės į kitą eis 5 atkarpos, kurias kirs tiesė, taigi iš viso turėsime 25 reikiamas atkarpas.
Nesunku nurodyti ir konkretų pavyzdį, kai gauname 25 atkarpas. Imkime apskritimą ir jo horizontaliąją simetrijos ašį. Dabar 5 taškus pasirinkime viršutiniame pusapskritimyje, likusius 5 — apatiniame. Ašį kirs $5 \cdot 5 = 25$ atkarpos.
Renkamės atsakymą **B**.

! Sakykime, kad k taškų yra vienoje tiesės pusėje, tada kitoje $10 - k$ taškų. Bus iš viso $k(10-k)$ atkarpų, kurios kerta tiesę (remiantis sąlyga jokios dvi atkarpos nesutampa). Vadinasi, reikia rasti didžiausią iš skaičių $k(10-k)$, $k = 0, 1, \ldots, 9, 10$. Išrašę visas sandaugas, gauname 0, 9, 16, 21, 24, 25, 24, 21, 16, 9, 0. Iš jų didžiausia yra $25 = 5 \cdot (10-5)$.
Teisingas atsakymas **B**.

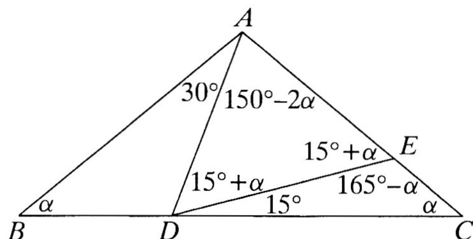
!! Žinoma, didžiausią reiškinio $k(10-k)$ reikšmę rasti galima ir paprasčiau. Kadangi

$$k(10-k) = 10k - k^2 = -(k^2 - 10k) = -(k-5)^2 + 25,$$

tai didžiausia reikšmė yra 25 (net jeigu nereikalautume, kad k turi būti sveikas).
Beje, mums visiškai aišku, kad jeigu duoti 10 taškų, tai visada galima išvesti tokią tiesę, kad kiekvienoje pusplokštumėje būtų po 5 taškus (net jeigu 3 ar daugiau taškų yra vienoje tiesėje). Formaliai tai įrodyti galima, pavyzdžiui, taip. Sujunkime kiekvienus du taškus tiese. Tokių tiesių „nedaug“ (ne daugiau kaip $10 \cdot 9/2 = 45$). Pasirinkime bet kurį tašką, nesutampantį nė su vienu iš duotųjų, ir per jį išveskime visoms toms tiesėms lygiagrečias. O dabar per tą tašką išveskime tiesę, nesutampančią su išvestosiomis (kitaip sakant, bet kuriame tų tiesių sudaromame kampe imkime tašką ir sujunkime jį tiese su pasirinktuoju tašku). Šią tiesę imkime abscisių ašimi, o bet kurią jai statmeną — ordinačių. Aišku, kad visų 10 taškų ordinatės skirtingos, $y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_{10}$. Tada, pavyzdžiui, tiesė $y = \frac{y_5 + y_6}{2}$ tinka kaip ieškomoji.

K30. Ⓑ 15°

! Lygiašonio trikampio BAC kampus B ir C pažymėkime α, tada kampas prie viršūnės A lygus $180° - 2\alpha$.



Todėl lygiašonio trikampio DAE kampas prie viršūnės A lygus $150° - 2\alpha$, o kampai prie pagrindo $15° + \alpha$. Vadinasi, $\angle DEC = 165° - \alpha$, ir trečias $\triangle CDE$ kampas $\angle CDE = 15°$.
Teisingas atsakymas **B.**

JUNIORAS (IX ir X klasės)

J1. Ⓒ 54°

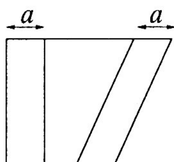
! Aišku, kad kampo didumas ir porcijos didumas proporcingi. Kadangi porcija sudaro $\frac{15}{100} = \frac{30}{2\cdot 100} = \frac{3}{20}$ torto, tai ir kampas sudaro $\frac{3}{20}$ pilnojo kampo, ir yra lygus $\frac{3}{20} \cdot 360° = 3 \cdot 18° = 54°$.
Teisingas atsakymas **C**.

J2. Ⓑ 16

Žr. uždavinio K7 sprendimą.

J3. Ⓐ Visų juostų plotas toks pat

? Išveskime tiesę per 3 juostos lūžio taškus, lygiagrečią duotosioms. Tada aišku, kad figūros 2 ir 3 sudėtos iš lygių lygiagretainių, taigi jų plotai lygūs. Vadinasi atsakymai **C** ir **D** netinka, **E** — nepanašus į teisybę, o 1 juostos plotas „iš akies“ nebent mažesnis.
Renkamės atsakymą **A**.



! Paprasta įrodyti, kad 1 ir 2 juostos viršutinės (taip pat ir apatinės) dalys lygiaplotės (žr. paveikslą). Kadangi „kairiąją“ trapeciją pastūmę per a į dešinę gauname „dešiniąją“ trapeciją, tai jų plotai lygūs. Bet atmetę trapecijų bendrąją dalį — „vidurinę“ trapeciją taip pat gausime lygius plotus, o tai ir yra juostų viršutinių dalių plotai.
Žinoma, galima remtis lygiagretainio ir stačiakampio ploto formulėmis, bet tai nelabai įdomu.
Teisingas atsakymas **A**.

J4. Ⓔ $2n^2 + 2003$

? Imkime $n = 0$, tada skaičiai **A**, **C**, **D** lyginiai, ir šie atsakymai atkrenta. Imkime $n = 1$, tada atkrenta ir atsakymas **B**.
Renkamės atsakymą **E**.

! Atsakymas **E** visada teisingas — juk lyginio ($2n^2$) ir nelyginio (2003) skaičių suma visada nelyginė.
Teisingas tik atsakymas **E**.

J5. Ⓓ Statusis

! Pažymėkime kampo A didumą α, tada $\angle B = 2\alpha$, $\angle C = 3\alpha$. Trikampio kampų suma lygi 180°, todėl $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180°$, $\alpha = 30°$. Vadinasi, $\angle C = 90°$, ir trikampis ABC yra statusis.
Teisingas atsakymas **D**.

J6. Ⓓ $\frac{5}{7}$

! Apgaulingas uždavinys: svarbiausia susivokti, kad dainos atlikimo laikas — tai nuo pirmo dainininko dainavimo pradžios iki trečio dainininko dainavimo pabaigos.
Sakykime, kad kiekvienas dainininkas vieną eilutę dainuoja laiką T, taigi visą dainą jis dainuoja laiką $12T$. Antras dainininkas įstoja po T, trečias — po $2T$, vadinasi, kartu jie visi dainuoja $10T$. Bet kadangi trečias įstoja po $2T$, tai daina skambės $12T + 2T = 14T$. Vadinasi, kartu dainininkai dainuoja $\frac{10T}{14T} = \frac{5}{7}$ dainos atlikimo laiko dalis.
Teisingas atsakymas **D**.

J7. Ⓑ 10 015

! Nesunku rasti skaičiaus $2003 \cdot a = 2003 \cdot \underbrace{11...1}_{2003}$ dešimtainę išraišką:

$$2003 \cdot \underbrace{11...1}_{2003} = 2000 \cdot \underbrace{11...1}_{2003} + 3 \cdot \underbrace{11...1}_{2003} = \underbrace{22...2}_{2003}000 + \underbrace{33...3}_{2003} = 222\underbrace{55...5}_{2000}333.$$

Todėl ieškomoji skaitmenų suma lygi $2 \cdot 3 + 5 \cdot 2000 + 3 \cdot 3 = 15 + 10\,000 = 10\,015$.
Teisingas atsakymas **B**.

J8. Ⓒ $a + 2b$
Žr. uždavinio K4 sprendimą.

J9. Ⓒ 3

! Funkcija $f(x) = 0$ tenkina duotąją funkcinę lygtį, nes kairioji pusė lygi 0, o dešinioji — taip pat: $f^2(x) + f^2(y) = 0^2 + 0^2 = 0$.
Funkcija $f(x) = \frac{1}{2}$ taip pat tenkina lygtį — kairioji pusė lygi $\frac{1}{2}$, o dešinioji $f^2(x) + f^2(y) = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$.
Funkcija $f(x) = 1$ lygties netenkina, nes kairioji pusė lygi 1, o dešinioji $1^2 + 1^2 = 2$.
Funkcija $f(x) = x$ lygtį tenkina, nes kairioji pusė lygi $f(x^2 + y^2) = x^2 + y^2$, o dešinioji — taip pat: $f^2(x) + f^2(y) = x^2 + y^2$.
Funkcija $f(x) = -x$ lygties netenkina, nes kairioji pusė $f(x^2+y^2) = -(x^2+y^2)$. Šie du reiškiniai „kartais“ lygūs (kai $x = y = 0$), o „kartais“ nelygūs (visais kitais atvejais). Bet funkcija tenkina lygtį tik tada, kai lygybė teisinga su visais x ir y.
Taigi iš duotųjų 5 funkcijų lygtį tenkina trys.

Teisingas atsakymas **C**.

!! Įdomu būtų išspręsti duotąją funkcinę lygtį — t. y. rasti visas funkcijas, tenkinančias duotąją lygtį. Pasirodo, tai sudėtingas uždavinys, o tokių funkcijų yra be galo daug.
Taigi spręskime tokį uždavinį.

Rasti visas funkcijas $f(x)$, kurios visiems x ir y tenkina lygtį

$$f(x^2 + y^2) = f^2(x) + f^2(y). \tag{1}$$

Sprendimas. Iš pradžių nagrinėkime tik neneigiamus x ir y. Imkime (1) lygybėje $x = y \to \sqrt{\frac{x}{2}}$, tada gauname $f(x) = 2f^2(\sqrt{\frac{x}{2}}) \geqslant 0$, o tai reiškia, kad mūsų funkcija įgyja tik neneigiamas reikšmes. Dabar lygybėje (1) imkime $x = y = 0$. Tada $f(0) = 2f^2(0)$, taigi turime du atvejus:
1) $f(0) = 0$ ir 2) $f(0) = \frac{1}{2}$.
1) *atvejis*, $f(0) = 0$. Paėmę (1) lygybėje $y = 0$, gauname

$$f(x^2) = f^2(x), \tag{2}$$

todėl $f(x^2 + y^2) = f(x^2) + f(y^2)$. Pakeitę šioje lygybėje x į $\sqrt{x}$, y į $\sqrt{y}$ gauname, kad su visais $x, y \geqslant 0$ teisinga lygybė

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \tag{3}$$

Kadangi $f(y) \geqslant 0$, tai lygybė (3) duoda

$$f(x + y) \geqslant f(x),$$

o tai reiškia, kad funkcija f didėja (plačiąja prasme) neneigiamiems x, t. y. $f(x) \leqslant f(y)$, jei tik $0 \leqslant x < y$.

Imkime (2) lygybėje $x = 1$. Tada $f(1) = f^2(1)$, todėl arba $f(1) = 0$, arba $f(1) = 1$.
Jeigu $f(1) = 0$, tai iš (3) lygybės $f(2) = 0$, tada $f(4) = 2f(2) = 0$, $f(8) = 0, \ldots, f(2^n) = 0, \ldots$, o kadangi $f(x)$ didėjanti, tai $f(x) = 0$ su visais x. Jau žinome, kad ši funkcija tenkina (1) lygtį.
Tegu dabar $f(1) = 1$. Kadangi iš (3) lygybės $f(2x) = 2f(x)$, $f(3x) = f(2x + x) = 3f(x)$ ir t. t., tai $f(nx) = nf(x)$. Paėmę čia $x = 1$, gauname $f(n) = n$, o paėmę $x = \frac{1}{n}$, gauname $1 = nf(\frac{1}{n})$, t. y. $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$. Pagaliau paėmę $x = \frac{m}{n}$, turime $f(m) = nf(\frac{m}{n})$, t. y. $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}$. Įrodėme, kad $f(r) = r$ visiems racionaliems $r \geqslant 0$.
Bet mūsų funkcija didėja, todėl nesunku įrodyti, kad $f(x) = x$ visiems $x \geqslant 0$. Iš tikrųjų, tarkime, kad kuriame nors taške $f(x) < x$. Tarp šių nelygių skaičių įstatykime racionalųjį skaičių r, $f(x) < r < x$. Kadangi $f(x)$ didėja, tai $f(r) \leqslant f(x)$, o kadangi r racionalus, tai paskutinė nelygybė reiškia, kad $r \leqslant f(x)$. Prieštara. Lygiai taip pat negali būti $f(x) > x$. Vadinasi, $f(x) = x$. Jau matėme, kad ši funkcija tenkina lygtį (1). Gavome antrą sprendinį. 1) atvejis išnagrinėtas.
2) *atvejis*, $f(0) = \frac{1}{2}$. Iš lygybės (1) su $y = 0$ gauname

$$f(x^2) = f^2(x) + \frac{1}{4}, \tag{4}$$

o tai be kita ko reiškia, kad $f(x^2) \geqslant \frac{1}{4}$, t. y. $f(x) \geqslant \frac{1}{4}$.
Imdami (1) lygybėje $x = y = \frac{1}{2}$ turime $f(\frac{1}{2}) = 2f^2(\frac{1}{2})$, ir kadangi $f(x) \geqslant \frac{1}{4} \neq 0$, tai $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
Remiantis (4) lygybe $f(x^2 + y^2) = f^2(x) + f^2(y) = f(x^2) - \frac{1}{4} + f(y^2) - \frac{1}{4} = f(x^2) + f(y^2) - \frac{1}{2}$, o tai reiškia, kad

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Imdami $y = x$ įsitikiname, kad jeigu $f(x) = \frac{1}{2}$, tai $f(2x) = \frac{1}{2}$. Vadinasi, $f(\frac{1}{2}) = f(1) = f(2) = \ldots = f(2^n) = \ldots = \frac{1}{2}$. Lygiai taip pat imdami (5) lygybėje $\frac{x}{2}$ vietoj x ir y, gauname $f(x) = 2f(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}$, o tai reiškia, jog jeigu $f(x) = \frac{1}{2}$, tai ir $f(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}$. Vadinasi, $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{4}) = \ldots = f(\frac{1}{2^n}) = \ldots = \frac{1}{2}$.
Jeigu žinotume, kad $f(x)$ didėja, tai iš karto būtų aišku, jog $f(x) \equiv \frac{1}{2}$. Dabar tenka elgtis kitaip. Apskaičiuokime $f\left((x + \frac{1}{2})^2\right)$ dviem būdais — vieną kartą taikydami (5), po to (4), kitą kartą — atvirkščiai:

$$f\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right) = f\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) = f(x^2) + f\left(x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2},$$
$$f\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right) = f^2\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \left(f(x) + f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = f^2(x) + \frac{1}{4} = f(x^2).$$

Sulyginę pastarųjų lygybių dešiniąsias puses, turime $f(x + \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$, arba $f(x) + f(\frac{1}{4}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, t. y. $f(x) = \frac{1}{2}$ su visais $x \geqslant 0$. 2) atvejis išnagrinėtas.
Taigi jeigu $f(x)$ tenkina lygtį (1), tai neneigiamiesiems x arba $f(x) = 0$, arba $f(x) = \frac{1}{2}$, arba $f(x) = x$. (Vadinasi, jeigu ieškotume funkcijų, apibrėžtų tik su neneigiamais x, tai šitos trys ir būtų funkcinės lygties (1) sprendiniai.)
Nagrinėkime neigiamus argumentus. Imkime $x > 0$ ir raskime $f(-x)$. Iš (1) lygybės $f^2(-x) = f((-x)^2 + y^2) - f^2(y) = f(x^2 + y^2) - f^2(y) = f^2(x)$. t. y. $f(-x) = \pm f(x)$. Tai reiškia, kad vienuose taškuose $f(-x) = -f(x)$, o kituose $f(-x) = f(x)$, ir tokių funkcijų yra be galo daug. Beje, tą sąlygą trumpai galima užrašyti taip: $|f(-x)| = f(x)$, kai $x > 0$. Taigi gavome funkciją $f(x) \equiv 0$, funkcijų šeimą $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ \pm x, & x < 0, \end{cases}$ ir funkcijų šeimą $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \geqslant 0, \\ \pm\frac{1}{2}, & x < 0. \end{cases}$

Patikrinti, kad visos gautosios funkcijos tenkina lygtį (1), paprasta. Pavyzdžiui, imkime funkcijas $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ \pm x, & x < 0. \end{cases}$ Kadangi argumentas $x^2 + y^2$ visada teigiamas, tai kairė lygties (1) pusė lygi $x^2 + y^2$. Bet tokia pat ir dešinė pusė, kadangi visos funkcijos reikšmės yra x arba $-x$, ir $(\pm x)^2 + (\pm y)^2 = x^2 + y^2$.
Funkcinė lygtis (1) išspręsta.

J10. Ⓓ 8

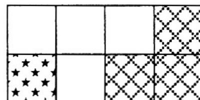
! Pradėti galima nuo Z: kadangi $\overline{ZYX} = \overline{XX} + \overline{YY} + \overline{ZZ} < 100 + 100 + 100 = 300$, tai lygybėje $\overline{XX} + \overline{YY} + \overline{ZZ} = \overline{ZYX}$ galėtų Z būti 1 arba 2. Bet $Z = 2$ būti negali — pagal paskutinius skaitmenis turėtume $Y = 8$, ir gautume $\overline{XX} + 88 + 22 = \overline{28X}$, o tai neįmanoma, nes $X + 2 + 1$ į sumos šimtus gali atnešti tik 1. Vadinasi, $Z = 1$, tada pagal paskutinius skaitmenis $Y = 9$, ir turime $\overline{XX} + 99 + 11 = \overline{18X}$, o tada aišku, kad $X = 8$ (ir viskas išeina: $88 + 99 + 11 = 198$).
Teisingas atsakymas **D**.

!! Iš vienetų stulpelio aišku, kad $Y + Z = 10$. Vadinasi, į antrą stulpelį persikelia 1. Bet $X + Z + 1$ gali būti tik 10, į pirmą stulpelį persikelia 1, t. y. $Z = 1$, tada $X = 8$.

J11. Ⓑ 3
Žr. uždavinio B30 sprendimą.

J12. Ⓒ

! Įsivaizduokime, kad nuėmėme viršutinį sluoksnį, o į apatinį žiūrime iš viršaus. Pilkoji detalė jame kubelių neturi. Sužymėkime žvaigždėtos ir subrūkšniuotos detalių kubelius, priklausančius apatiniam sluoksniui. Liko keturi kubeliai — tai ir yra išimtosios detalės kubeliai. Matome, kad tai detalė **C**.



Teisingas atsakymas **C**.

J13. Ⓑ 75

? Galima tikrinti atsakymus, nors tai ir prastas būdas — geriau skaičiuoti.
Imkime atsakymą **C**, t. y. sakykime, kad pilna statinė yra 90 litrų. Tada jos 70% yra $\frac{7}{10} \cdot 90\,\ell$, o jos 30% yra $\frac{3}{10} \cdot 90\,\ell$. Skirtumas lygus $\frac{4}{10} \cdot 90 = 36\,\ell$, o tai truputį per daug. Tikriname atsakymą **B**. Pilna statinė yra $75\,\ell$, jos 70% yra $\frac{7}{10} \cdot 75\,\ell$, o jos 30% yra $\frac{3}{10} \cdot 75\,\ell$. Skirtumas $\frac{4}{10} \cdot 75 = 30\,\ell$, kaip ir turi būti.
Renkamės atsakymą **B**.

! Mums nebekyla jokių abejonių, kad atsakymas **B** teisingas: jaučiame, kad didėjant statinės talpai didėja ir skirtumas. Bet paprasčiausia — skaičiuoti.
Kai iš statinės nupilta 30% vandens, tai joje yra 70% vandens. Todėl $30\,\ell$ sudaro $70 - 30 = 40\%$ pilnos statinės. Vadinasi, 4% statinės — tai $3\,\ell$, o 100% — tai 75 litrai.
Teisingas atsakymas **B**.

J14. Ⓒ 856

! Raskime didžiausią įmanomą triženklį skaičių, kuris gaunamas iš 888 pakeitus du skaitmenis ir kuris dalijasi iš 8. Aišku, kad vienas jo skaitmuo yra 8. Kadangi 1000 dalijasi iš 8, tai didžiausi dalūs iš 8 triženkliai skaičiai yra 992, 984, … . Matome, kad jau 984 tinka — turi skaitmenį 8.
Panašiai randame mažiausią tokį skaičių. Kadangi 100 nesidalija iš 8, tai 104 dalijasi, ir dalijasi skaičiai 104, 112, 120, 128, … . Vadinasi, mažiausias reikiamas skaičius yra 128. Todėl ieškomas skirtumas yra $984 - 128 = 856$.
Teisingas atsakymas **C**.

J15. (D) 64

Žr. uždavinio K24 sprendimą.

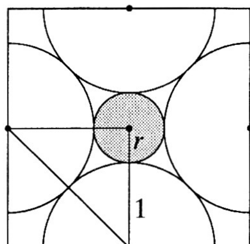
J16. (D) 1002

! Atlikę skliaustuose sudėtį, gauname, kad duotoji sandauga lygi $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2003}{2002} \cdot \frac{2004}{2003}$. Matome, kad kiekvienos (išskyrus paskutinę) trupmenos skaitiklis lygus po jos einančios trupmenos vardikliui. Todėl suprastinę gauname $\frac{2004}{2} = 1002$.

Teisingas atsakymas **D**.

J17. (A) $\sqrt{2} - 1$

! Pasižymėję mažojo apskritimo spindulį r, pagal Pitagoro teoremą turime $(1+r)^2 + (1+r)^2 = (1+1)^2$, t. y. $2(1+r)^2 = 4$, $(1+r)^2 = 2$, $1 + r = \sqrt{2}$, $r = \sqrt{2} - 1$.



Teisingas atsakymas **A**.

J18. (E) 15 555

! Kiekvienas iš tų skaičių prasideda arba 2, arba 3. Skaitmeniu 2 prasideda trys skaičiai — 2003, 2030 ir 2300. Skaitmeniu 3 taip pat prasideda trys skaičiai — 3002, 3020 ir 3200. Jų suma lygi $2003 + 2030 + 2300 + 3002 + 3020 + 3200 = 15\,555$.

Teisingas atsakymas **E**.

J19. (E) 2^{34}

! Pagal sąlygą $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = a_1 : a_2 = 1 : 2 = 2^{-1}$, $a_4 = a_2 : a_3 = 2 : 2^{-1} = 2^2$, $a_5 = a_3 : a_4 = 2^{-1} : 2^2 = 2^{-3}$, $a_6 = a_4 : a_5 = 2^2 : 2^{-3} = 2^5$, $a_7 = a_5 : a_6 = 2^{-3} : 2^5 = 2^{-8}$, $a_8 = a_6 : a_7 = 2^5 : 2^{-8} = 2^{13}$, $a_9 = a_7 : a_8 = 2^{-8} : 2^{13} = 2^{-21}$.

Todėl $a_{10} = a_8 : a_9 = 2^{13} : 2^{-21} = 2^{34}$.

Teisingas atsakymas **E**.

!! Beje, matematinės indukcijos metodu lengva įrodyti, kad $a_n = 2^{(-1)^n F_{n-2}}$, kur F_k — k-tasis Fibonačio skaičius ($F_0 = F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, kai $k \geqslant 3$).

J20. (C) -12; -8; -4; 0

? Iš grafiko $f(-4) = 0$, $f(0) = 0$. Pratęsę pustieses iki tiesių matome, kad $f(x) = x + 4$, kai $x < -4$. Dabar aišku, kad reikia imti taškus $0, -4, -8, -12, -16$.

Kadangi $f(0) = 0$, tai ir $f(f(0)) = f(0) = 0$, ir $f(f(f(0))) = 0$.

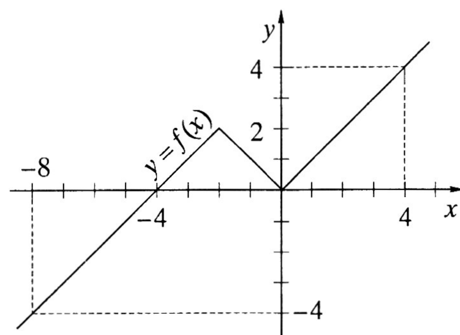
Kadangi $f(-4) = 0$, tai ir $f(f(-4)) = f(0) = 0$, ir $f(f(f(-4))) = 0$.

Kadangi $f(-8) = -4$, tai ir $f(f(f(-8))) = f(f(-4)) = 0$.

Kadangi $f(-12) = -8$, tai ir $f(f(f(-12))) = f(f(-8)) = f(-4) = 0$. Vadinasi atsakymai **A**, **B** ir **E** netinka.

Kadangi $f(-16) = -12$, tai $f(f(f(-16))) = f(f(-12)) = f(-8) = -4 \neq 0$. Vadinasi, atsakymas **D** netinka, ir lieka tik atsakymas **C**.

Renkamės atsakymą **C**.



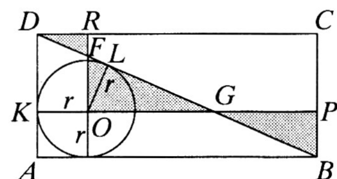
! Vėl spėjimas ? buvo labai artimas sprendimui. Kadangi $f(x)$ turi tik du nulius, $f(-4) = f(0) = 0$, tai $f(f(x))$ gali būti lygi nuliui tada ir tik tada, kai $f(x) = -4$ arba $f(x) = 0$, t. y. kai $x = -8$, $x = -4$ ir $x = 0$. Todėl $f(f(f(x)))$ gali būti lygi nuliui tada ir tik tada, kai $f(f(x)) = -4$ arba $f(f(x)) = 0$, t. y. kai $f(x) = -8$, $f(x) = -4$ arba $f(x) = 0$, t. y. kai $x = -12$, $x = -8$, $x = -4$ ir $x = 0$.
Teisingas atsakymas **C**.

J21. Ⓐ $\frac{9}{4}$

! Kadangi $\triangle ADE$ ir $\triangle ADC$ turi bendrą aukštinę iš viršūnės D, tai jų plotų santykis lygus pagrindų santykiui $\frac{15}{24}$. Kadangi $\triangle ADC$ ir $\triangle ABC$ turi bendrą aukštinę iš viršūnės C, tai jų plotų santykis lygus $\frac{36}{10}$. Todėl $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ADE}}{S_{ADC}} \cdot \frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \frac{15}{24} \cdot \frac{36}{10} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$.
Teisingas atsakymas **A**.

J22. Ⓒ 18

! Taškus, kuriuose įstrižainė DB kerta stačiakampio $OPCR$ kraštines, pažymėkime F ir G. Apskritimo centrą O sujunkime su lietimosi taškais K, L ir M, o spindulį pažymėkime r (žr. brėžinį). Kadangi $OKDR$ stačiakampis, tai $DR = KO = r = OL$, vadinasi, statieji trikampiai DRF ir OLF lygūs. Analogiškai lygūs ir trikampiai LGO ir GPB. Todėl stačiakampio $OPCR$ plotas lygus trikampio BCD plotui, t. y. pusei stačiakampio $ABCD$ ploto. Taigi ieškomasis plotas lygus $36 : 2 = 18$.
Teisingas atsakymas **C**.



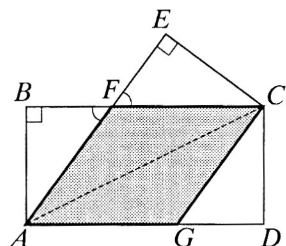
!! Stačiakampio $OPCR$ plotą galima apskaičiuoti remiantis į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo spindulio formule $r = (a + b - c)/2$. Jeigu a ir b stačiakampio $ABCD$ kraštinės (pagal sąlygą $ab = 36$), o r — į trikampį ABD įbrėžto apskritimo spindulys, tai stačiakampio $OPCR$ kraštinės lygios $a - r$ ir $b - r$. Todėl jeigu $c = BD$, tai stačiakampio $OPCR$ plotas lygus $(a - r)(b - r) = (a - \frac{a+b-c}{2})(b - \frac{a+b-c}{2}) = \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{b-a+c}{2} = \frac{c^2-(a-b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2-(a^2+b^2-2ab)}{4} = \frac{ab}{2} = \frac{36}{2} = 18$.

J23. Ⓑ 1

! Kadangi K ir L prieštarauja vienas kitam, tai abu jie sakyti teisybės negali (bet gali abu meluoti). Vadinasi vaikas N neabejotinai meluoja.
Jeigu K ir L abu meluoja, tai vaikas M sako teisybę, ir šiuo atveju iš vaikų lygiai vienas sako teisybę — būtent M.
Jeigu iš vaikų K ir L vienas sako teisybę, tai M meluoja. Vadinasi, ir šiuo atveju vienas sako teisybę.
Teisingas atsakymas **B**.

J24. Ⓒ 7,5

! Pažymėkime taškus, kaip parodyta brėžinyje. Kadangi $\triangle CDG = \triangle CEF$ (tai tas pats trikampis — prieš nukerpant ir po to), tai $\angle CEF = 90°$.



Statieji trikampiai CEF ir ABF lygūs. Pažymėję $CF = x$, gauname $BF = 12 - x$, $AF = x$. Iš $\triangle ABF$ pagal Pitagoro teoremą $x^2 = (12 - x)^2 + 6^2$, $24x = 180$, taigi $x = 7{,}5$.
Teisingas atsakymas **C**.

J25. Ⓑ 1

! Išskiriame pilnąjį kvadratą: $x^2 + 2xy + y^2 = xy$, $x^2 + xy + y^2 = 0$, $4x^2 + 4xy + 4y^2 = 0$, $(2x + y)^2 + 3y^2 = 0$. Kadangi abu dėmenys neneigiami, tai abu jie lygūs nuliui, $y = 0$, o tada ir $x = 0$.
Teisingas atsakymas **B**.

J26. Ⓓ 8

? Kadangi 5 imti negalima, tai pradėkime nuo 6. Skaičių 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 skaitmenų sumos lygios 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4. Išrašinėkime skaičius, kurių skaitmenų sumos dalijasi iš 5: 14, 19, 23, 28, 32, 37, 41, 46, 50, 55, 64, 69 ir t. t. Matome, kad didžiausia norimų skaičių atkarpa yra nuo 56 iki 63, kurie duoda sumas 11, 12, 13, 14, 6, 7, 8, 9. Spėjame, kad daugiau kaip 8 tokių iš eilės einančių skaičių nebūna.
Renkamės atsakymą **D**.

! Įrodysime, kad tarp bet kurių 9 iš eilės einančių skaičių bus skaičius, kurio skaitmenų suma dalijasi iš 5. Iš tikrųjų, jeigu tarp tų 9 skaičių nėra skaičiaus, kuris baigiasi nuliu, tai tų skaičių skaitmenų sumos taip pat sudaro devynių paeiliui einančių skaičių aibę, todėl tarp jų yra suma, kuri dalijasi iš 5.
Liko išnagrinėti atvejį, kai tarp devynių skaičių yra skaičius, kuris baigiasi 0. Tada tas skaičius yra arba tarp pirmų penkių, arba tarp paskutinių penkių iš mūsų devynetuko. Pirmu atveju paskutinių penkių, o antru atveju — pirmųjų penkių skaičių sumos sudaro aibę iš 5 iš eilės einančių skaičių, taigi tarp jų yra suma, kuri dalijasi iš 5.
O štai aštuonių iš eilės einančių skaičių skaitmenų sumos gali nesidalyti iš 5. Jau matėme, kad tokie, pavyzdžiui, yra skaičiai 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63.
Teisingas atsakymas **D**.

J27. Ⓒ Yra trys paeiliui stovinčios matematikos knygos
Žr. uždavinio K25 sprendimą.

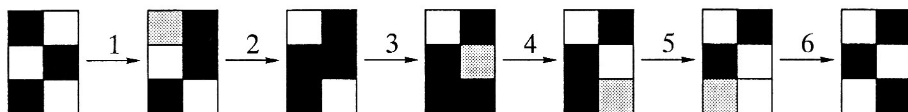
J28. Ⓒ 22

? Imame 1, 4 ir pridedame trečią skaičių — gauname sumas $1+4+7=12$, $1+4+10=15$, $1+4+13=18$, $1+4+16=21$, $1+4+19=24$, $1+4+22=27$, $1+4+25=30$, $1+4+28=33$. Imkime didžiausius du skaičius — gauname sumas $25+28+22=75$, $25+28+19=72$, $25+28+16=69$, $25+28+13=66$, $25+28+10=63$, $25+28+7=60$, $25+28+4=57$, $25+28+1=54$. Imkime vidurinius skaičius 13 ir 16 — gauname sumas $13+16+7=36$, $13+16+10=39$, $13+16+19=48$, $13+16+22=51$. Nesunku gauti ir trūkstamas sumas, dalias iš 3, būtent 42 ir 45 — imame mažiausią ir didžiausią dėmenis, o tada $1+28+13=42$, $1+28+16=45$. Gavome visus skaičius nuo $12=3\cdot 4$ iki $75=3\cdot 25$, dalius iš 3. Jų yra tiek pat, kiek yra skaičių nuo 4 iki 25, t. y. tiek pat, kiek nuo 1 iki 22 (atmetėme po 3), t. y. 22.
Renkamės atsakymą **C**.

! Spėjimą ? labai nesunku padaryti griežtą. Jeigu iš visų skaičių atmesime po 1, tai skirtingų sumų bus tiek pat, tik jos bus trejetu mažesnės. Jeigu skaičius 0, 3, ..., 27 pakeisime triskart mažesniais, tai vėl sumų bus tiek pat, tik jos bus triskart mažesnės, o skaičiai bus 0, 1, ..., 9. Mažiausia įmanoma suma yra $0+1+2=3$, didžiausia $9+8+7=24$, o visas tarpines sumas gauti paprasta — užtenka imti iš pradžių 0 ir 1 ir pridėti po vieną iš likusių skaičių — gauname sumas nuo 3 iki 10. Tada imame 9 ir 8 ir pridedame po vieną iš likusių — gauname sumas nuo 24 iki 17. Pagaliau prie $0+9$ pridedame dėmenį nuo 2 iki 8 — gauname sumas nuo 11 iki 17. Taigi iš skaičių 0, 1, ..., 9 gavome visas sumas nuo 3 iki 24, t. y. 22 sumas. Tiek pat sumų galima sudaryti ir iš pradinių skaičių.
Teisingas atsakymas **C**.

J29. Ⓒ 6

! Kiekvienas iš juodų kvadratėlių turi tapti baltu. Kad kvadratėlis iš juodo pasidarytų baltu, pagal sąlygą reikia ne mažiau kaip 2 ėjimų (nes prieš tai jis turi tapti žaliu). Kadangi juodų kvadratėlių yra 3, ir jokie du iš jų negali pakeisti spalvos tuo pačiu ėjimu (nes jokie du iš jų nėra gretimi), tai prireiks ne mažiau kaip $2\cdot 3=6$ ėjimų.
Šešių ėjimų užtenka — tai rodo pavyzdys.



Teisingas atsakymas **C**.

J30. Ⓒ 80

! Skaičiuje gali būti nuo 1 iki 5 vienetų (skaičius negali būti 00 000). Jei yra 1 vienetas, tai jis gali stovėti vienoje iš 5 vietų (nuliai mums netrukdo — tiesiog, pavyzdžiui, laikysime, kad skaičius 00 010 yra dviženklis). Tokių skaičių yra 5, ir jiems užrašyti reikės 5 vienetų.
Jei skaičiuje yra 2 vienetai (o likusieji nuliai), tai viską lemia, kur parašyti tie vienetai. Juos 5 vietose galima parašyti $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ būdų (vietose 12 13 14 15 23 24 25 34 35 45), ir tiems 10 skaičių užrašyti prireiks $10\cdot 2=20$ vienetų.
Jei skaičiuje yra 3 vienetai, tai jame yra 2 nuliai. Dviem nuliams parašyti, kaip jau matėme, yra 10 būdų. Taigi tiems 10 skaičių parašyti reikės $10\cdot 3=30$ vienetukų.
Jei skaičiuje yra 4 vienetai, tai jame yra 1 nulis, kuris gali užimti 5 padėtis. Tiems 5 skaičiams užrašyti reikės $5\cdot 4=20$ vienetų.
Pagaliau, jeigu skaičiuje visi 5 vienetai, tai jis vienintelis.
Iš viso prireiks $5+20+30+20+5=80$ vienetų.
Teisingas atsakymas **C**.

SENJORAS (XI ir XII klasės)

S1. Ⓑ 3

Žr. uždavinio B30 sprendimą.

S2. Ⓑ $\frac{1}{4}$

Žr. uždavinio K22 sprendimą.

S3. Ⓒ $a + 2b$

Žr. uždavinio K4 sprendimą.

S4. Ⓓ Padalyti iš 8

! Alius skaičiavo pagal formulę $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, bet vietoj r įstatė $2r$, todėl jo rezultatas pasidarė $\frac{4}{3} \cdot \pi(2r)^3 = \frac{4}{3} \cdot 8\pi R^3$, t. y. 8 kartus didesnis. Todėl norėdamas gauti teisingą atsakymą, jis rezultatą turi padalyti iš 8.
Teisingas atsakymas **D**.

S5. Ⓐ 2^{n+2004}

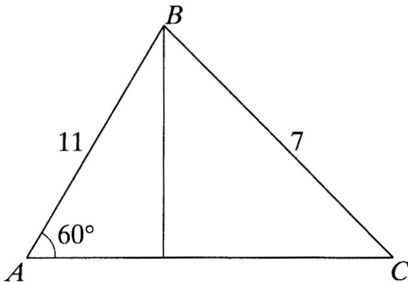
! Skaičiuojame:

$$2^{n+2003} + 2^{n+2003} = 2 \cdot 2^{n+2003} = 2^1 \cdot 2^{n+2003} = 2^{1+n+2003} = 2^{n+2004}.$$

Teisingas atsakymas **A**.

S6. Ⓔ Nė su vienais iš jų

! Trikampis su duomenimis **A** neegzistuoja, nes neišpildyta trikampio nelygybė: $7 + 11 < 19$.
Trikampyje **C** kraštinė CA trumpesnė už kraštinę AB, todėl $\angle ACB > \angle CBA = 128°$. Bet tada trikampio kampų suma didesnė už $180°$.
Trikampio **D** kampų suma didesnė už $180°$, taigi toks trikampis neegzistuoja.
Liko atvejis **B** — pats apgaulingiausias. Pagal sinusų teoremą $\sin C : AB = \sin A : BC$, $\sin C : 11 = \frac{\sqrt{3}}{2} : 7$, $\sin C = \frac{11\sqrt{3}}{14} = \sqrt{\frac{363}{196}}$. Bet sinusas negali būti didesnis už 1, taigi trikampis **B** taip pat neegzistuoja.
Teisingas atsakymas **E**.



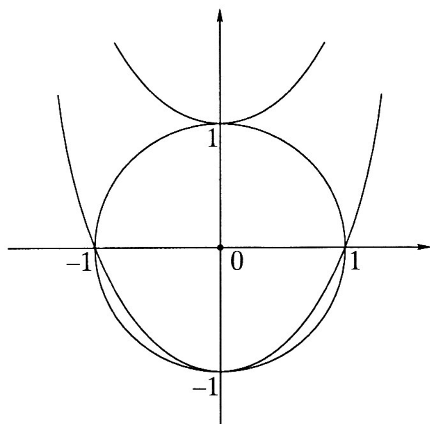
!! Galima apsieiti be sinusų teoremos ir atveju **B**. Aukštinė BD, nuleista iš viršūnės B į kraštinę AC, lygi $11 \sin 60° = 11 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{363}{4}} = \sqrt{90{,}75} > 7 = BC$. Bet statmuo negali būti ilgesnis už pasvirąją — prieštara.

S7. Ⓐ 650

! Per ketverius metus 1998–2001 į mokyklą buvo priimta $325 \cdot 4 = 1300$ moksleivių. Vidutinis per penkerius metus priimtų moksleivių skaičius buvo $325 \cdot 1{,}2 = 390$, todėl per penkerius metus 1998–2002 buvo priimta $390 \cdot 5 = 1950$ moksleivių. Vadinasi, 2002 metais buvo priimta $1950 - 1300 = 650$ moksleivių.
Teisingas atsakymas **A**.

S8. Ⓔ 1

? Nusibraižykime apskritimą $x^2 + y^2 = 1$ ir stumdykime aukštyn-žemyn parabolę $y = x^2$.



Matome, kad parabolė, kai $m = 1$, liečia apskritimą, o kai $m = -1$, taip pat liečia apskritimą, bet kerta jį dar dviejuose taškuose.
Renkamės atsakymą **E**.

! Mums reikia nustatyti, su kuriomis m reikšmėmis sistema $x^2 + y^2 = 1$, $y = x^2 + m$ turi vienintelį sprendinį. Bet x į sistemą įeina lygiškai, todėl jeigu sistema turi sprendinį (x_0, y_0), tai ji turi ir sprendinį $(-x_0, y_0)$. Vadinasi, sprendiniai (x_0, y_0) ir $(-x_0, y_0)$ turi sutapti, t. y. $x_0 = -x_0$, arba $2x_0 = 0$, $x_0 = 0$. Todėl sistema *gali turėti* vienintelį sprendinį tik kai $x = 0$. Tada iš sistemos $y^2 = 1$, $y = m$, t. y. $m = 1$ arba $m = -1$.
Čia svarbiausia neapsirikti ir nepasirinkti atsakymo **C**. Įsitikinome tik tuo, kad šios reikšmės „įtartinos“, tik su šiomis reikšmėmis sistema *gali turėti* vienintelį sprendinį, bet tai dar visai nereiškia, kad su kuria nors (ar abiem) iš šių reikšmių ji *turi* vienintelį sprendinį. Ir iš tikrųjų, kai $m = -1$, pradinė sistema virsta $x^2 + y^2 = 1$, $y = x^2 - 1$ ir turi net 3 sprendinius: kadangi x turint y nustatomas vienareikšmiškai, tai sprendinių skaičius apsprendžia lygtis $x^2 + (x^2 - 1)^2 = 1$, o ji turi 3 sprendinius: $x^2 + x^4 - 2x^2 = 0$, $x^4 - x^2 = 0$, $x^2(x^2 - 1) = 0$, $x = 0, \pm 1$ (tada atitinkamai $y = -1, 0$). O štai su $m = 1$ sistemos sprendinys vienintelis, nes sistema $x^2 + y^2 = 1$, $y = x^2 + 1$, kaip ir lygtis $x^2 + (x^2 + 1)^2 = 1$, turi vienintelį sprendinį: $x^2 + x^4 + 2x^2 = 0$, $x^2(x^2 + 3) = 0$, $x = 0$ (tada $y = 1$).
Teisingas atsakymas **E**.

S9. Ⓑ 16

Žr. uždavinio K7 sprendimą.

S10. Ⓐ 154

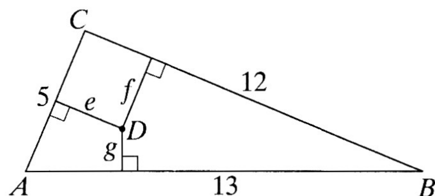
? Kadangi pirmos eilutės vidurinis skaičius y įeina į antros eilutės kiekvieną skaičių xy ir yz, tai jis į trečios eilutės skaičių xy^2z įeina kvadratu. Bet $100 = 5^2 \cdot 4$, $90 = 3^2 \cdot 10$, $88 = 2^2 \cdot 22$, $60 = 2^2 \cdot 15$, t. y. turi daliklį kvadratą. O štai skaičius $154 = 11 \cdot 14$ tokio daliklio neturi.
Renkamės atsakymą **A**.

x	y	z
xy	yz	
xy^2z		

! Dar reikia įrodyti, kad visus skaičius gauti galima. Iš tikrųjų,
100 gauname surašę viršuje 2, 5, 2, nes $100 = 10 \cdot 10 = (2 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 2)$.
90 gauname, surašę viršuje 5, 3, 2, nes $90 = 9 \cdot 10 = (5 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 2)$.
88 gauname, surašę viršuje 11, 2, 2, nes $88 = 4 \cdot 22 = (11 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2)$.
60 gauname, surašę viršuje 3, 2, 5, nes $60 = 4 \cdot 15 = (3 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 5)$.
Teisingas atsakymas **A**.

S11. Ⓒ 60

! Matome, kad $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot f$ yra $\triangle CDB$ plotas, $\frac{1}{2} \cdot e \cdot 5$ yra $\triangle CDA$ plotas, o $\frac{1}{2} \cdot g \cdot 13$ yra $\triangle ADB$ plotas. Tų trijų trikampių plotų suma lygi trikampio ABC plotui, $30 = \frac{1}{2}(5e + 12f + 13g)$, todėl ieškomo reiškinio reikšmė lygi 60.



Teisingas atsakymas **C**.

S12. Ⓒ

Žr. uždavinio J12 sprendimą.

S13. Ⓐ $\frac{1}{5}$

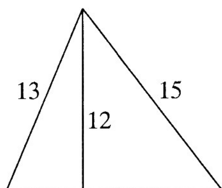
! Būdų, kaip gali nutūpti 2 baltos žuvėdros į 10 vietų, yra $10 \cdot 9/2 = 45$. Būdų, kaip 2 baltos žuvėdros gali atsitūpti greta, yra devyni: $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(5,6)$, $(6,7)$, $(7,8)$, $(8,9)$, $(9,10)$. Vadinasi, ieškomoji tikimybė lygi $9 : 45 = 1/5$.
Teisingas atsakymas **A**.

S14. Ⓑ 2001

! Kadangi $1 + 2003 \cdot 2005 = 1 + (2004 - 1)(2004 + 1) = 1 + 2004^2 - 1 = 2004^2$, tai po antru nuo galo šaknies ženklu atsiduria $1 + 2002 \cdot 2004 = 1 + (2003 - 1)(2003 + 1) = 2003^2$. Po trečiu šaknies ženklu atsiduria $1 + 2001 \cdot 2003 = 1 + 2002^2 - 1^2 = 2002^2$, o po ketvirtuoju $1 + 2000 \cdot 2002 = 1 + 2001^2 - 1^2 = 2001^2$. Vadinasi, reiškinio reikšmė yra 2001.
Teisingas atsakymas **B**.

S15. (C) 84

! Kadangi aukštinė trumpesnė už kiekvieną kraštinę, tarp kurių ji yra, tai 13 ir 15 yra kraštinių ilgiai, o 12 — aukštinės ilgis.



Pagal Pitagoro teoremą pagrindo atkarpos lygios $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25 \cdot 1} = 5$, $\sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{27 \cdot 3} = 9$. Todėl pagrindas lygus 14, o trikampio plotas $6 \cdot 14 = 84$.
Teisingas atsakymas **C**.

S16. (E) 2

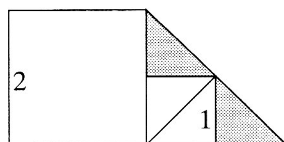
! Kadangi $5^{21} = (5^3)^7 = 125^7$, o $2^{49} = (2^7)^7 = 128^7$, tai natūraliųjų skaičių septintųjų laipsnių sekoje tarp jų yra tik skaičiai 126^7 ir 127^7.
Teisingas atsakymas **E**.

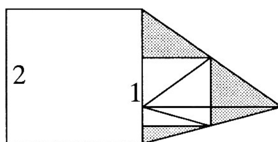
S17. (D) 98

! Žinome, kad $10^{100} - 1$ dalijasi iš $10^2 + 1$, — pavyzdžiui, remiantis geometrinės progresijos sumos formule, $10^{98} - 10^{96} + \cdots - 10^4 + 10^2 - 1 = (10^{100} - 1)/(10^2 + 1)$. Pradėkime tikrinti nuo didžiausių dviženklių skaičių.
Skaičius $10^{99} + 1$ nesidalija iš 101, nes iš 101 nesidalija 10 kartų didesnis skaičius $100^{100} + 10 = (10^{100} - 1) + 11$.
O štai $10^{98} + 1$ dalijasi iš 101, nes $10^{98} + 1 = 10^{98} + 10^{100} - 10^{100} + 1 = 10^{98}(10^2 + 1) - (10^{100} - 1)$, ir abu dėmenys dalijasi iš 101.
Teisingas atsakymas **D**.

S18. (A) 1

? Atspėti atsakymą paprasta iš kairiojo paveikslėlio.





Matome, kad abiejų trikampių plotas lygus mažojo kvadratėlio plotui, t. y. vienetui.
Renkamės atsakymą **A**.

! Išveskime prišlietojo trikampio aukštinę (žr. dešinįjį brėžinį), o jos pagrindą sujunkime su prišlietojo kvadrato viršūnėmis. Matome, kad po aukštine yra 4 lygūs mažesni trikampiai, o virš aukštinės yra 4 lygūs didesni trikampiai. Tiek užtušuotąją sritį, tiek prišlietąjį kvadratą sudaro 2 mažesni ir 2 didesni trikampiai. Vadinasi, užtušuotas plotas lygus kvadrato plotui, t. y. lygus 1.
Teisingas atsakymas **A**.

S19. (C) 3

Žr. uždavinio J9 sprendimą.

S20. Ⓑ $3\sqrt{6}$

! Kadangi $a^4 + \frac{1}{a^4} = 4$, tai $(a^2 + \frac{1}{a^2})^2 = a^4 + 2 + \frac{1}{a^4} = 6$, todėl $a^2 + \frac{1}{a^2} = \sqrt{6}$. Sudauginkime paskutinę ir duotąją lygybes: $4\sqrt{6} = (a^4 + \frac{1}{a^4})(a^2 + \frac{1}{a^2}) = a^6 + \frac{1}{a^6} + a^2 + \frac{1}{a^2} = a^6 + \frac{1}{a^6} + \sqrt{6}$, iš kur $a^6 + \frac{1}{a^6} = 3\sqrt{6}$.
Teisingas atsakymas **B**.

S21. Ⓒ 248

! Taisyklingas trikampis — tai 1 sritis. Apibrėžę apskritimą, gauname 3 naujas sritis. Apibrėžę apie apskritimą kvadratą, gauname 4 naujas sritis. Apibrėžę apie kvadratą apskritimą, gauname dar 4 naujas sritis. Dabar jau aišku, kad sričių yra

$$1 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + \ldots + 15 + 15 + 16 =$$

$$20 + 2(4 + 5 + \ldots + 15) = 20 + (4 + 15)12 = 4(5 + 57) = 248.$$

Teisingas atsakymas **C**.

S22. Ⓒ 6

! Kadangi taškas $(x; y)$ priklauso apskritimui, kurio centras $(2; 2)$, o spindulys r, tai $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = r^2$. Bet $y = r$, todėl $(x - 2)^2 + (r - 2)^2 = r^2$, $(x - 2)^2 = r^2 - (r - 2)^2 = 2 \cdot (2r - 2)$. Matome, kad $x - 2$ kvadratas lyginis, taigi ir x lyginis. Kadangi pagal sąlygą $r \geqslant 3$, tai $(x - 2)^2 \geqslant 8$, $x - 2 \geqslant \sqrt{8}$, $x - 2 \geqslant 3$, $x \geqslant 5$. Bet x lyginis, todėl $x \geqslant 6$.
Reikšmė $x = 6$ galima (todėl ji ir mažiausia galima). Iš tikrųjų, jeigu $x = 6$, $y = r = 5$, tai uždavinio sąlygos išpildytos: $(6 - 2)^2 + (5 - 2)^2 = 5^2$.
Teisingas atsakymas **C**.

S23. Ⓔ Pirminis skaičius

! Kadangi $A + B$ pirminis skaičius, didesnis už 2, tai jis nelyginis, ir bent vienas iš skaičių A ir B lyginis, t. y. lygus 2. Bet pagal sąlygą $A > B$, taigi $B = 2$. Gauname, kad A, $A - 2$, $A + 2$ yra pirminiai. Bet iš jų bent vienas dalijasi iš 3, nes jų sandauga $A(A^2 - 4) = (A - 1)A(A + 1) - 3A$ dalijasi iš 3 (pirmas dėmuo yra 3 iš eilės einančių skaičių sandauga, ir bent vienas jų dalijasi iš 3). Vadinasi, vienas iš skaičių A, $A - 2$, $A + 2$ yra lygus 3 (kitaip, dalydamasis iš 3, jis nebūtų pirminis). Bet $A \neq 3$ (kitaip $A - 2 = 1$ — ne pirminis), $A + 2 \neq 3$ (kitaip $A = 1$ ne pirminis), todėl $A - 2 = 3$. Vadinasi, $A = 5$, ir keturi skaičiai 5, 2, 3, 7 tenkina sąlygą. Tada jų suma lygi 17, ir atsakymai **A**, **B**, **C**, **D** netinka.
Teisingas tik atsakymas **E**.

S24. Ⓔ 65 Lt

! Sakykime, kad kainą padidinome x kartų po 5 litus ($x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; jei x neigiamas, tai kaina sumažėja). Tada megztinis kainuos $75 + 5x$ litų, jų bus parduota $100 - 20x$, už megztinius bus gauta $(75 + 5x)(100 - 20x)$, o pelnas sudarys $(75 + 5x)(100 - 20x) - 30(100 - 20x) = (5x + 45)(100 - 20x) = 100(x + 9)(5 - x)$ litų. Nustatykime, su kokiu x pelnas didžiausias ($x \in \boldsymbol{Z}$). Šis reiškinys didžiausią reikšmę įgyja kartu su sandauga $(x + 9)(5 - x) = -x^2 - 4x + 45 = -(x + 2)^2 + 49$, t. y. kai $x = -2$. Tada megztinio kaina bus $75 - 5 \cdot 2 = 65$ litai.
Teisingas atsakymas **E**.

S25. Ⓑ 1

! Pasižymėkime $x+3=u$, $y-3=v$. Tada reikia nustatyti, kiek skirtingų porų tenkina lygtį $(u-3+v+3)^2=uv$, t. y. $(u+v)^2=uv$, $u^2+2uv+v^2=uv$, $u^2+uv+v^2=0$, $\left(u+\frac{1}{2}v\right)^2-\frac{1}{4}v^2+v^2=0$, $\left(u+\frac{1}{2}v\right)^2+\frac{3}{4}v^2=0$. Iš čia $v=0$, o tada ir $u=0$. Gavome vienintelį sprendinį $(u,v)=(0,0)$, taigi pradinę lygtį tenkina vienintelė pora $(-3;3)$.
Teisingas atsakymas **B**.

S26. Ⓑ $\frac{2}{3}$

! Skaičiuokime: $a_0=4$; $a_1=6$; $a_2=a_1:a_0=\frac{6}{4}$; $a_3=a_2:a_1=\frac{1}{4}$; $a_4=\frac{1}{4}:\frac{6}{4}=\frac{1}{6}$; $a_5=\frac{1}{6}:\frac{1}{4}=\frac{4}{6}$; $a_6=\frac{4}{6}:\frac{1}{6}=4$; $a_7=4:\frac{4}{6}=6$. Matome, kad sekos nariai pradėjo kartotis, ir kartosis toliau kas šeši. Vadinasi, $a_{2004}=4$, todėl $a_{2003}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.
Teisingas atsakymas **B**.

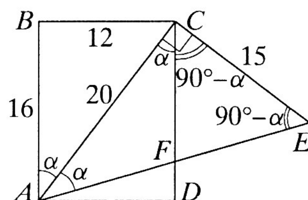
!! Žinoma, seka bus periodinė su bet kuriomis pradinėmis a_0 ir a_1 reikšmėmis. Iš tikrųjų,

$$a_2=\frac{a_1}{a_0};\quad a_3=\frac{a_1}{a_0}:a_1=\frac{1}{a_0};\quad a_4=\frac{1}{a_0}:\frac{a_1}{a_0}=\frac{1}{a_1};\quad a_5=\frac{1}{a_1}:\frac{1}{a_0}=\frac{a_0}{a_1};$$
$$a_6=\frac{a_0}{a_1}:\frac{1}{a_1}=a_0;\quad a_7=a_0:\frac{a_0}{a_1}=a_1.$$

Matome, kad sekos nariai pradėjo kartotis. Bet kiekvieno sekos nario reikšmė priklauso tik nuo dviejų ankstesniųjų narių reikšmių. Vadinasi, kai tik pasikartoja dviejų gretimų narių reikšmės, tai pradeda kartotis ir visų narių reikšmės.

S27. Ⓐ 75

! Pagal Pitagoro teoremą $AC^2=12^2+16^2=4^2(3^2+4^2)=4^2\cdot 25$, $AC=4\cdot 5=20$. Trikampiai ABC ir ACE panašūs pagal statųjį kampą ir dvi kraštines, $16:12=20:15$. Todėl $\angle DCA=\angle BAC=\angle CAE(=\alpha)$, ir $\triangle AFC$ lygiašonis, $AF=FC$. Kita vertus, $\angle E=90^\circ-\alpha$, $\angle ECF=90^\circ-\alpha$, taigi ir $\triangle CFE$ lygiašonis, $CF=FE$. Vadinasi, $AF=FE$, ir $\triangle ACF$ plotas lygus pusei $\triangle ACE$ ploto, t. y. lygus $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 15=75$.



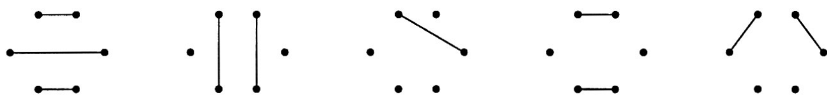
Teisingas atsakymas **A**.

S28. Ⓔ 125

! Imkime koordinačių sistemą, kurioje kubo briaunos sutampa su vienetiniais vektoriais $\vec{i}$, $\vec{j}$ ir $\vec{k}$. Tada yra po 4 briaunas, kolinearias kiekvienam iš jų. Imkime briaunas, kolinearias vektoriui $\vec{i}$. Jeigu visas keturias briaunas nukreipsime $\vec{i}$ kryptimi, gausime tų briaunų-vektorių sumą $4\vec{i}$, jeigu tris — gausime $3\vec{i}-\vec{i}=2\vec{i}$, jeigu dvi — gausime $2\vec{i}-2\vec{i}=0\vec{i}$. Panašiai dar gausime reikšmes $-2\vec{i}$ ir $-4\vec{i}$. Vadinasi, vektoriaus-sumos abscisė gali įgyti 5 reikšmes: -2, -1, 0, 1, 2. Bet lygiai tokias pat reikšmes ir nepriklausomai nuo kitų koordinačių gali įgyti tiek ordinatė (y), tiek aplikatė (z). Pagal sandaugos taisyklę vektorius-suma $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ galės įgyti $5\cdot 5\cdot 5=125$ reikšmes.
Teisingas atsakymas **E**.

S29. Ⓒ 30

! Imkime fiksuotą ilgąją šešiakampio įstrižainę — ji (su kraštinėmis) sudaro dvi poras tolimų atkarpų. Kadangi ilgųjų įstrižainių yra 3, tai gauname $3 \cdot 2 = 6$ poras.



Imkime dvi trumpąsias įstrižaines. Jos sudaro 3 poras tolimų atkarpų.
Imkime trumpąją įstrižainę ir kraštinę — tokių tolimų atkarpų porų yra 2. Kadangi trumpųjų įstrižainių yra 6, gauname $6 \cdot 2 = 12$ tolimų atkarpų porų.
Pagaliau imkime dvi kraštines — jos tolimos, kai priešingos (3 poros) ir kai jas skiria viena kraštinė (6 poros).
Iš viso turime $6 + 3 + 12 + 3 + 6 = 30$ tolimų atkarpų porų.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Imkime bet kurias 4 viršūnes — aišku, kad jos duoda 2 tolimų kraštinių poras (keturkampio priešingų kraštinių poras). Pasirinkti 4 taškus — reiškia išmesti iš 6 taškų du, o tai galima padaryti $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ būdų (sunumeravus taškus, išmesti galima 12 13 14 15 16 23 24 25 26 34 35 36 45 46 56). Todėl tolimų atkarpų porų yra $15 \cdot 2 = 30$.

S30. Ⓓ $x^4 - 4$

? Pasižymėję $x^2 = y$, turime $f(y+1) = y^2 + 4y$. Įstatome $y = x^2 - 2$, tada $f(x^2 - 1) = (x^2-2)^2 + 4(x^2-2) = x^4 - 4x^2 + 4 + 4x^2 - 8 = x^4 - 4$.
Renkamės atsakymą **D**.

?? Beje, pasižymėję $x^2+1 = z$, gauname $f(z) = (z-1)^2+4(z-1) = z^2-2z+1+4z-4 = z^2+2z-3$. Daugianaris $f(x) = x^2+2x-3$ tenkina uždavinio sąlygą, $f(x^2+1) = (x^2+1)^2+2(x^2+1)-3 = x^4+2x^2+1+2x^2+2-3 = x^4+4x^2$, o tada $f(x^2-1) = (x^2-1)^2+2(x^2-1)-3 = x^4-4$.

! Samprotaukime griežčiau. Sakykime, kad daugianaris $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Tada

$$f(x^2+1) = a_n(x^2+1)^n + a_{n-1}(x^2+1)^{n-1} + \cdots + a_1(x^2+1) + a_0.$$

Aukščiausią pastarojo reiškinio laipsnį duoda narys $a_n x^{2n}$, ir jis pagal sąlygą lygus x^4. Vadinasi, $n = 2$, $a_n = 1$, ir $f(x) = x^2 + a_1 x + a_0$. Vėl pagal sąlygą $f(x^2+1) = (x^2+1)^2 + a_1(x^2+1) + a_0 \equiv x^4 + 4x^2$. Paėmę $x = 0$ gauname $1 + a_1 + a_0 = 0$, o paėmę $x = 1$ turime $4 + 2a_1 + a_0 = 5$. Iš šių dviejų lygčių atimdami gauname $a_1 = 2$, o tada $a_0 = -3$. Taigi $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Ir vis dėlto — kurgi slypėjo tas negriežtumas? Ogi pakeiskime sąlygoje žodį *daugianaris* žodžiu *funkcija*. Tada funkcija $f(x)$ apibrėžta tik reikšmėms, ne mažesnėms už 1 (juk $x^2 + 1 \geqslant 1$), o padarę x^2 (ar $x^2 + 1$) nauju kintamuoju, mes apie tai „pamiršome“. Imkime funkciją

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)(x+3), & \text{jei } x \geqslant 1, \\ 0, & \text{jei } x < 1. \end{cases}$$

Ji tenkina uždavinio sąlygą — kadangi $x^2+1 \geqslant 1$, tai $g(x^2+1) = (x^2+1-1)(x^2+1+3) = x^4+4x^2$. Bet kai, pavyzdžiui, $x = 0$, tai $g(x^2-1) = g(-1) = 0$, o imdami daugianarį $f(x) = x^2 + 2x - 3$ gauname $f(x^2-1) = x^4 - 4 = -4$.
Taigi griežtame sprendime neišvengiamai teks remtis tuo, kad $f(x)$ — daugianaris. Jeigu sąlygoje šio žodžio nebūtų, tai atsakymas būtų nevienareikšmis.

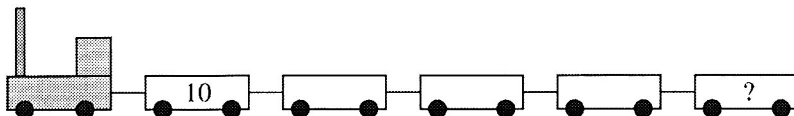
Questions of Kangaroo 2003

MINOR (grades 3 and 4)

3-POINT QUESTIONS

M1. How much is $0 + 1 + 2 + 3 + 4 - 3 - 2 - 1 - 0$?
A 0 **B** 2 **C** 4 **D** 10 **E** 16

M2. There are 10 boxes in the first van. Every further van contains twice as many boxes as the previous one. How many boxes are there in the fifth van?



A 100 **B** 120 **C** 140 **D** 160 **E** 180

M3. Sophie draws kangaroos: a blue one, then a green, then a red, then a black, then a yellow, a blue, a green, a red, a black, and so on. What colour is the 17^{th} kangaroo?
A Blue **B** Green **C** Red **D** Black **E** Yellow

M4. In the teachers' room there are 6 tables with 4 chairs each, 4 tables with 2 chairs each, and 3 tables with 6 chairs each. How many chairs are there altogether?
A 40 **B** 25 **C** 50 **D** 36 **E** 44

M5. A coin is lying on the table. What is the maximum number of such coins which can be put on the table in such a way that each of them touches this coin?
A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

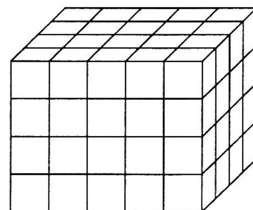
M6. In the picture the distance $KM = 10$, $LN = 15$, $KN = 22$. Find the distance LM.



A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

M7. Hedgehog Mark complained to his friends: "If I had picked twice as many apples as I really did, I would have 24 apples more than I have now." How many apples did Mark pick?
A 48 **B** 24 **C** 42 **D** 12 **E** 36

M8. Chris constructed the brick on the picture using red and blue cubes of the same size. The outside of the brick is completely red, but all cubes used inside are blue. How many blue cubes did Chris use?
A 12 **B** 24 **C** 36 **D** 40 **E** 48



4-POINT QUESTIONS

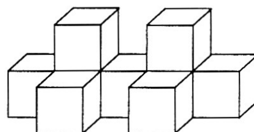
M9. A rectangle of size 4×7 is drawn on a squared sheet of paper. How many squares of the size 1×1 are cut into two parts by the diagonal of that rectangle?
A 8 **B** 9 **C** 10 **D** 11 **E** 12

M10. This table shows the quantity of different types of flowers in the botanical garden. Ted was told by the gardener that there were 35 azaleas, 50 irises and 85 roses in the garden. What is the number of gerberas growing in the garden?
A 95 **B** 100 **C** 105 **D** 110 **E** 115

Azaleas	
Irises	
Roses	
Gerberas	

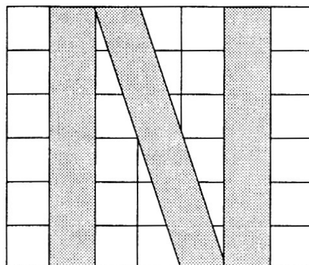
M11. Annie fell asleep at 9:30 pm and woke up at 6:45 am. Her brother Martin slept 1 hour 50 min longer. How many hours and minutes did Martin sleep?
A 30 h 5 min **B** 11 h 35 min **C** 11 h 5 min **D** 9 h 5 min **E** 8 h 35 min

M12. The construction in the picture is built of cubes of the same size and weighs 189 grams. How many grams does one cube weigh?
A 29 **B** 25 **C** 21 **D** 19 **E** 17



M13. Kangaroo Jumpy was training for the Animal Olympiad. His longest jump during the training was 50 dm 50 cm 50 mm long. In the end he won the gold medal at the Olympiad with a jump that was 123 cm longer. How long was Jumpy's winning jump?
A 6 m 78 cm **B** 5 m 73 cm **C** 5 m 55 cm **D** 11 m 28 cm **E** 7 m 23 cm

M14. If the length of the side of a little square is 1, what is the area of the letter N?
A 15 **B** 16 **C** 17 **D** 18 **E** 19



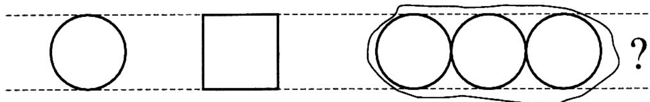
M15. Betty likes calculating the sum of the digits that she sees on her digital clock (for instance, if the clock shows 21:37, then Betty gets $2 + 1 + 3 + 7 = 13$). What is the maximum sum she can get?
A 24 **B** 36 **C** 19 **D** 25 **E** 23

M16. In the class there are 29 children. 12 children have a sister and 18 children have a brother. Tina, Bert, and Ann have no brother and no sister. How many children in that class have both a brother and sister?
A No one **B** 1 **C** 3 **D** 4 **E** 6

5-POINT QUESTIONS

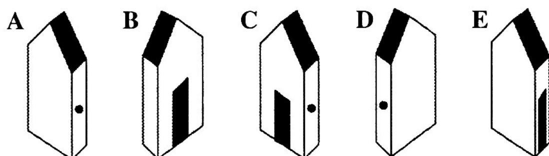
M17. Joe wants to buy some balls. If he bought five balls, he would still have 10 dollars left in his wallet. If he wanted to buy seven balls, he would have to borrow 22 dollars. How much is one ball (the price of a ball is an integer number)?
A 11 **B** 16 **C** 22 **D** 26 **E** 32

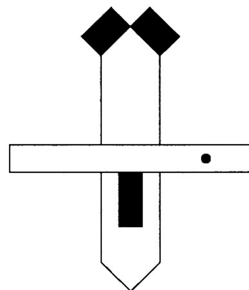
M18. I surrounded the wooden circle (see picture) using a cm of thread. After that I surrounded by thread the wooden square — b cm of thread was enough for that. How much thread (in cm) would be enough to surround the three wooden circles without moving them?



A $3a$ **B** $2a+b$ **C** $a+2b$ **D** $3b$ **E** $a+b$

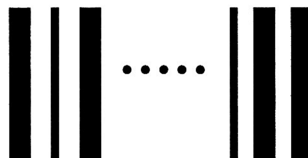
M19. The picture on the right has been drawn on paper and cut out to make a house. Which of the houses does it make?



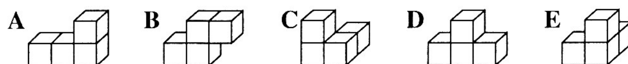


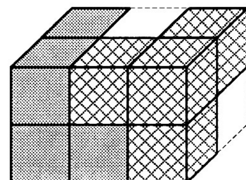
M20. Kangaroo bought 3 types of sweets: big, medium and small ones. Big sweets cost 4 coins per 1, medium — 2 coins per 1, small — 1 coin per 1. Kangaroo bought 10 sweets and he paid 16 coins. How many big sweets did kangaroo buy?
A 5 **B** 4 **C** 3 **D** 2 **E** 1

M21. A bar-code is formed by 17 alternating black and white bars (the first and the last bars are black). The black bars are of two types: wide and narrow. The number of white bars is greater by 3 than the number of wide black bars. Then the number of narrow black bars is
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5



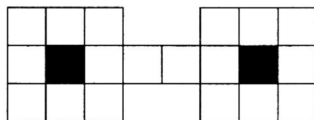
M22. A rectangular parallelepiped was composed of 3 pieces, each consisting of 4 little cubes. Then one piece was removed (see picture). Which one?





M23. In the toy shop the price for one dog and three bears is the same as for four kangaroos. Three dogs and two bears together also have the same price as four kangaroos. What is more expensive and how many times — the dog or the bear?
A The dog is two times more expensive
B The bear is two times more expensive
C The same price
D The bear is three times more expensive
E The dog is three times more expensive

M24. The composite board shown in the picture consists of 20 fields 1×1. How many possibilities are there to cover all 18 white fields with 9 rectangular stones 1×2? (The board cannot be turned. Two possibilities are different if at least one stone lies in another way.)
A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 16



BENJAMIN (grades 5 and 6)

3-POINT QUESTIONS

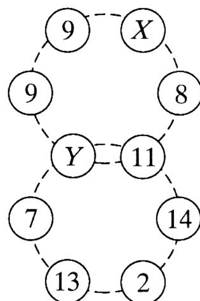
B1. Which number is the greatest?
A $2+0+0+3$ **B** $2\times0\times0\times3$ **C** $(2+0)\times(0+3)$ **D** $20\times0\times3$ **E** $(2\times0)+(0\times3)$

B2. Sophie draws kangaroos: a blue one, then a green, then a red, then a black, then a yellow, a blue, a green, a red, a black, and so on. What colour is the 17^{th} kangaroo?
A Blue **B** Green **C** Red **D** Black **E** Yellow

B3. How many integers can one find in the interval from 2.09 to 15.3?
A 13 **B** 14 **C** 11 **D** 12 **E** Infinitely many

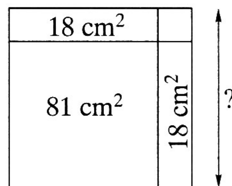
B4. Which is the smallest positive integer divisible by 2, 3, and 4?
A 1 **B** 6 **C** 12 **D** 24 **E** 36

B5. The sum of the numbers in each of the rings should be 55. Which number is X?
A 9 **B** 10 **C** 13 **D** 16 **E** 18



B6. Tom has 9 banknotes of 100 dollars each, 9 banknotes of 10 dollars each, and 10 banknotes of 1 dollar each. How many dollars has he?
A 1 000 **B** 991 **C** 9 910 **D** 9 901 **E** 99 010

B7. The square in the picture consists of two smaller squares and two rectangles of area $18\,\text{cm}^2$ each. The area of one of smaller rectangles is $81\,\text{cm}^2$. What is the length (in cm) of side of the biggest square?
A 9 **B** 2 **C** 7 **D** 11 **E** 10



B8. Betty likes calculating the sum of the digits that she sees on her digital clock (for instance, if the clock shows 21:37, then Betty gets $2+1+3+7=13$). What is the maximum sum she can get?
A 24 **B** 36 **C** 19 **D** 25 **E** 23

B9. In the picture the distance $KM=10$, $LN=15$, $KN=22$. Find the distance LM.

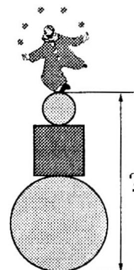


A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

B10. The number 24 has eight divisors: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 and 24. Find the smallest number having four divisors.
A 4 **B** 6 **C** 8 **D** 9 **E** 10

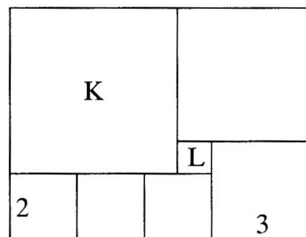
4-POINT QUESTIONS

B11. The picture shows the clown Dave dancing on top of two balls and one cubic box. The radius of the lower ball is 6 dm, the radius of the upper ball is three times less. The side of the cubic box is 4 dm longer than the radius of the upper ball. At what height (in dm) above the ground is the clown Dave standing?
A 14 **B** 20 **C** 22 **D** 24 **E** 28

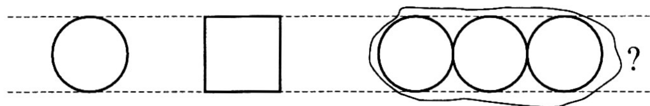


B12. We take two different numbers from 1, 2, 3, 4, 5 and find their sum. How many different sums can we obtain?
A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 8 **E** 9

B13. The rectangle in the picture consists of 7 squares. The lengths of the sides of some of the squares are shown. Square K is the biggest one, square L — the smallest one. How many times is the area of K bigger than the area of L?
A 16 **B** 25 **C** 36 **D** 49 **E** Impossible to find



B14. I surrounded the wooden circle (see picture) using a cm of thread. After that I surrounded by thread the wooden square — b cm of thread was enough for that. How much thread (in cm) would be enough to surround the three wooden circles without moving them?

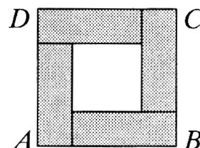


A $3a$ **B** $2a+b$ **C** $a+2b$ **D** $3b$ **E** $a+b$

B15. Benito has 20 small balls of different colours: yellow, green, blue and black. 17 of the balls are not green, 5 are black, 12 are not yellow. How many blue balls does Benito have?
A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 8 **E** 15

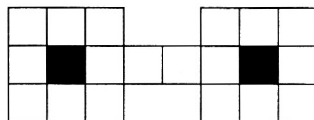
B16. There are 17 trees along the road from Basil's home to a pool. Basil marked some trees with a red strip as follows. On his way to bathe he marked the first tree and then each second tree, and on his way back he marked the first tree and then each third tree. How many trees have no mark after that?
A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

B17. Square $ABCD$ is comprised of one inner square (white) and four shaded congruent rectangles. Each shaded rectangle has a perimeter of 40 cm. What is the area (in cm^2) of square $ABCD$?
A 400 **B** 200 **C** 160 **D** 100 **E** 80

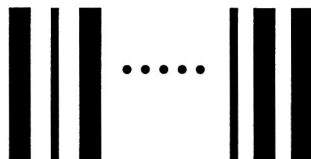


B18. Today's date is 20.03.2003. What date will it be 2003 minutes after the hour 20:03?
A 21.03.2003 **B** 22.03.2003 **C** 23.03.2003 **D** 21.04.2003 **E** 22.04.2003

B19. The composite board shown in the picture consists of 20 fields 1×1. How many possibilities are there exist to cover all 18 white fields with 9 rectangular stones 1×2? (The board cannot be turned. Two possibilities are called different if at least one stone lies in another way.)
A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 16

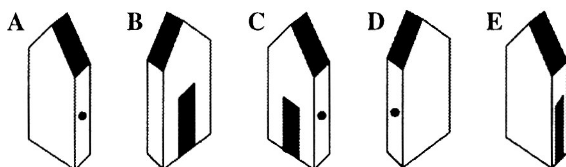


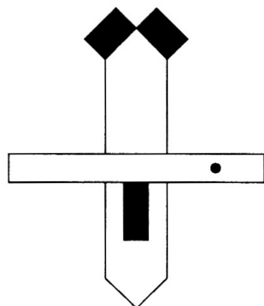
B20. A bar-code is formed by 17 alternating black and white bars (the first and the last bars are black). The black bars are of two types: wide and narrow. The number of white bars is greater by 3 than the number of wide black bars. Then the number of narrow black bars is
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5



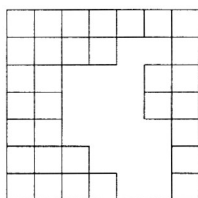
5-POINT QUESTIONS

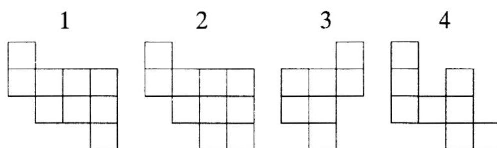
B21. The picture on the right has been drawn on paper and cut out to make a house. Which of the houses does it make?





B22. The square was cut out from a page in a squared exercise book. Then two figures in the picture were cut out from the square. Which ones?

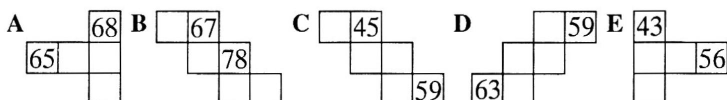




A 1 and 3 **B** 2 and 4 **C** 2 and 3 **D** 1 and 4 **E** Impossible to cut out

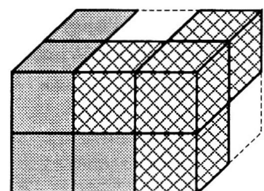
B23. Walter displayed all the integers from 0 to 109 according to some simple rule. Here is the beginning of his 5-column numeral chart. Which of the following elements could not be the a part of Walter's chart?

0	2	4	6	8
1	3	5	7	9
10	12	14	16	18
11	13	15	17	19
20	22	24	26	28
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



B24. A rectangular parallelepiped was composed of 3 pieces, each consisting of 4 little cubes. Then one piece was removed (see picture). Which one?





B25. You have six line segments of lengths 1 cm, 2 cm, 3 cm, 2001 cm, 2002 cm and 2003 cm. You have to choose three of these segments to form a triangle. How many different choices of three segments are there which work?
A 1 **B** 3 **C** 5 **D** 6 **E** More than 10

B26. There were completely red and completely green dragons in the dungeon. Each red dragon had 6 heads, 8 legs and 2 tails. Each green dragon had 8 heads, 6 legs and 4 tails. In all the dragons had 44 tails. The number of green legs was 6 fewer than of red heads. How many red dragons were there in the dungeon?
A 6 **B** 7 **C** 8 **D** 9 **E** 10

B27. What is the length (in cm) of the line (see picture) connecting vertices M and N of the square?
A 10 200 **B** 2 500 **C** 909 **D** 10 100 **E** 9 900

B28. Every figure in the picture replaces some digit. What is the sum □ + ○?
A 6 **B** 7 **C** 8 **D** 9 **E** 13

B29. The figure in the drawing consists of five isosceles right triangles of the same size. Find the area (in cm^2) of the shaded figure.
A 20 **B** 25 **C** 35 **D** 45 **E** Cannot be found

B30. Ann has the box containing 9 pencils. At least one of them is blue. Among every 4 of the pencils at least two have the same colour, and among every 5 of the pencils at most three have the same colour. What is the number of blue pencils?
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 1 **E** Impossible to determine

CADET (grades 7 and 8)

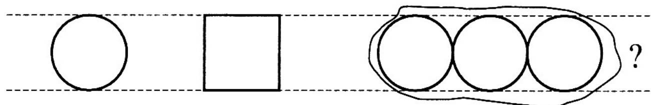
3-POINT QUESTIONS

C1. There were 5 parrots in a pet shop. Their average price was 6 000 dollars. One day the most expensive parrot was sold. The average price of the remaining four parrots was 5 000 dollars. What was the price (in dollars) of the parrot sold?
A 1 000 **B** 2 000 **C** 5 500 **D** 6 000 **E** 10 000

C2. A folded napkin was cut through (see picture). What does it look like when unfolded?
A **B** **C** **D** **E**

C3. A straight line is drawn across a 4 × 4 chessboard. What is the greatest number of 1 × 1 squares which can be cut into two pieces by the line?
A 3 **B** 4 **C** 6 **D** 7 **E** 8

C4. The area of the wooden square equals a. The area of each wooden circle equals b. Three circles are lined up as shown in the picture. If we tie together the three circles with a thread as short as possible, without moving them, what is the area inside the thread?

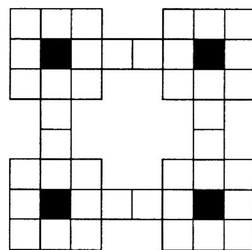


A $3b$ **B** $2a + b$ **C** $a + 2b$ **D** $3a$ **E** $a + b$

C5. For a hexagon (not necessarily convex), the maximum possible number of interior right angles is
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

C6. A bottle and a glass together have the same volume as a jug. A bottle has the same volume as a glass and a tankard. Three tankards have the same volume as two jugs. How many glasses of water equal one tankard?
A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 6 **E** 7

C7. The composite board shown in the picture consists of 44 fields 1×1. How many possibilities are there to cover all 40 white fields with 20 rectangular stones 1×2? (The board cannot be turned. Two possibilities are different if at least one stone lies in another way.)
A 8 **B** 16 **C** 32 **D** 64 **E** 100



C8. In a positive integer consisting of at least 2 digits, the last digit has been crossed out, so that the number has been decreased n times. What is the maximum value of n?
A 9 **B** 10 **C** 11 **D** 19 **E** 20

C9. There are four line segments drawn. Which number of intersection points *is impossible*?
A 2 **B** 3 **C** 5 **D** 6 **E** 7

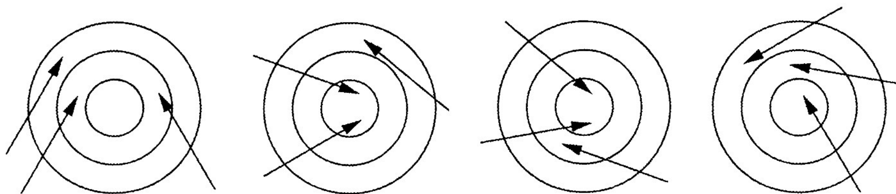
C10. Which of the following numbers gives, when multiplied by 768, the product ending with the highest number of zeroes?
A 7 500 **B** 5 000 **C** 3 125 **D** 2 500 **E** 10 000

4-POINT QUESTIONS

C11. Lying on a table, there is a transparent square sheet of film with the letter y written on it. We turn the sheet 90° clockwise, then turn it over from its right side, then turn it 180° counterclockwise. What do we now see?
A ≺ **B** ≻ **C** ʎ **D** ≺ **E** ɣ

C12. Mike has 42 identical cubes, each with the edge 1 cm long. He used all of the cubes to construct a cuboid. The perimeter of the base of that cuboid is 18 cm. What is its height?
A 1 cm **B** 2 cm **C** 3 cm **D** 4 cm **E** 5 cm

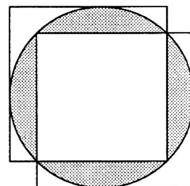
C13. Jeffrey shoots three arrows at each of four identical targets. He scores 29 points on the first target, 43 on the second and 47 on the third. How many points does Jeffrey score on the last target?



A 31 **B** 33 **C** 36 **D** 38 **E** 39

C14. The weight of a truck without a load is 2000 kg. Today the load initially comprised 80% of the total weight. At the first stop, a quarter of the load was left. What percentage of the total weight does the load then comprise?
A 20% **B** 25% **C** 55% **D** 60% **E** 75%

C15. Two quadrates with the same size cover a circle, the radius of which is 3 cm. Find the total area (in cm^2) of the shaded figure.
A $8(\pi - 1)$ **B** $6(2\pi - 1)$ **C** $9\pi - 25$ **D** $9(\pi - 2)$ **E** $\frac{6\pi}{5}$



C16. You have six line segments of lengths 1 cm, 2 cm, 3 cm, 2001 cm, 2002 cm and 2003 cm. You have to choose three of these segments to form a triangle. How many different choices of three segments are there which work?
A 1 **B** 3 **C** 5 **D** 6 **E** More than 10

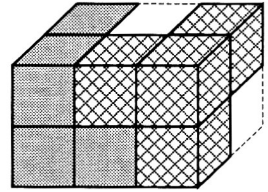
C17. How many positive integers n possess the following property: among the positive divisors of n different from 1 and n itself, the largest is 15 times the smallest.
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** Infinitely many

C18. Six points K, L, M, N, P, R are marked on a line from left to right, in the same order as listed. It is known that $KN = MR$ and $LN = NR$. Then, necessarily
A $KL = LM$ **B** $LM = NP$ **C** $LN = PR$ **D** $KL = MN$ **E** $MN = PR$

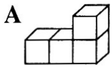
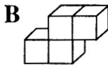
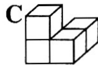
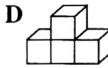
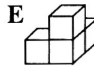
C19. Mary has 6 cards with natural numbers written on them (one number on each card). She chooses 3 cards and calculates the sum of the corresponding numbers. Having done this for all 20 possible combinations of 3 cards, she discovers that 10 sums are equal to 16, and the other 10 sums are equal to 18. Then the smallest number on the cards is
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

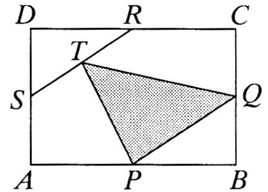
C20. Paul, Bill, John, Nick and Tim stood in a circle, the distances between any two neighbours being different. Each of them said the name of the boy standing closest to him. The names Paul and Bill were said two times each, and the name John was said once. Then
A Paul and Bill were not neighbours
B Nick and Tim were not neighbours
C Nick and Tim were neighbours
D The situation described is impossible
E None of the above

5-POINT QUESTIONS

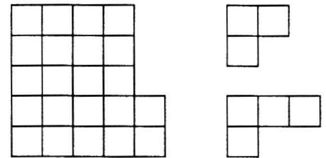


C21. A rectangular parallelepiped was composed of 3 pieces, each consisting of 4 little cubes. Then one piece was removed (see picture). Which one?

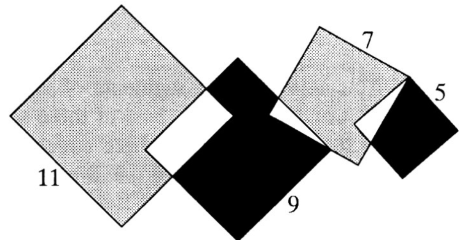
A  **B**  **C**  **D**  **E** 



C22. In a rectangle $ABCD$, let P, Q, R and S be the midpoints of sides AB, BC, CD and AD, respectively, and let T be the midpoint of segment RS. Which fraction of the area of $ABCD$ does triangle PQT cover?
A $\frac{5}{16}$ **B** $\frac{1}{4}$ **C** $\frac{1}{5}$ **D** $\frac{1}{6}$ **E** $\frac{3}{8}$

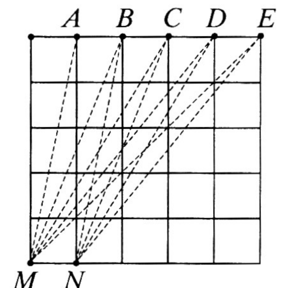


C23. Carl composed the figure shown on the left side of the drawing from the smaller three-square and four-square figures shown on the right side. The smaller figures can be turned around, but not turned over. What is the smallest number of three-square figures needed for that?
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 6 **E** Impossible to compose



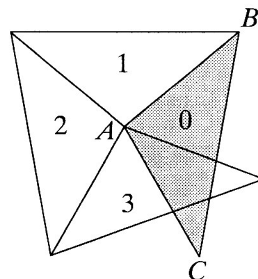
C24. In the picture there are four overlapping squares with sides 11, 9, 7 and 5 long. How much greater is the sum of the two grey areas than the sum of the two black areas?
A 25 **B** 36 **C** 49 **D** 64 **E** 0

C25. On a bookshelf there are 50 math and physics books. No two physics books stand side by side, but every math book has a math neighbour. Which of the following statements *may turn out to be false*?
A The number of math books is at least 32
B The number of physics books is at most 17
C There are 3 math books standing in succession
D If the number of physics books is 17, then at least one of them is the first or the last on the bookshelf
E Among any 9 successive books, at least 6 are math books



C26. A square is divided into 25 small squares (see the picture). Find the measure of the angle which is the sum of the angles MAN, MBN, MCN, MDN, MEN.
A 30° **B** 45° **C** 60° **D** 75° **E** 90°

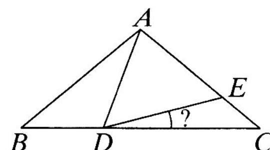
C27. We are going to make a spiral of isosceles triangles. We'll start with the shaded triangle BAC, which has a top angle $\angle BAC = 100°$, and move counterclockwise. Let ΔABC have number 0. Every of the next triangles (with numbers 1, 2, 3,...) will have exactly one edge adjoining the previous one (see the picture). What will be the number of the first triangle which precisely covers triangle nr. 0?
A 10 **B** 12 **C** 14 **D** 16 **E** 18



C28. How many positive integers n can be found such that 2003 divided by n leaves a remainder of 23?
A 22 **B** 19 **C** 13 **D** 12 **E** 36

C29. There are some 10 points on the area, and there are no three points on the same line. Every two points are connected by a segment. What is the largest possible number of these segments, which can be crossed by another line that doesn't pass through any of these points?
A 20 **B** 25 **C** 30 **D** 35 **E** 45

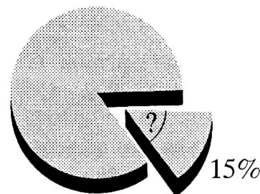
C30. In triangle ABC (see picture) $AB = AC$, $AE = AD$, and $\angle BAD = 30°$. What is the measure of angle CDE?
A 10° **B** 15° **C** 20° **D** 25° **E** 30°



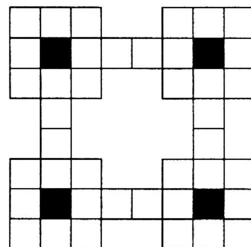
JUNIOR (grades 9 and 10)

3-POINT QUESTIONS

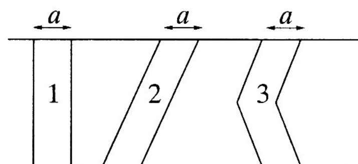
J1. 15% of a round cake is cut as shown in the figure. How many degrees is the angle denoted by the question mark?
A 30° **B** 45° **C** 54° **D** 15° **E** 20°



J2. The composite board shown in the picture consists of 44 fields 1×1. How many possibilities are there to cover all 40 white fields with 20 rectangular stones 1×2? (The board cannot be turned. Two possibilities are different if at least one stone lies in another way.)
A 8 **B** 16 **C** 32 **D** 64 **E** 100



J3. In the picture, three strips of the same horizontal width a are marked 1, 2, 3. These strips connect the two parallel lines. Which strip has the biggest area?
A All three strips have the same area
B Strip 1 **C** Strip 2 **D** Strip 3
E Impossible to answer without knowing a



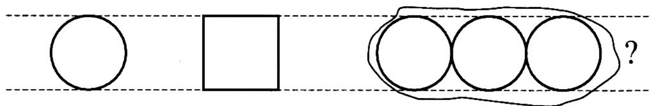
J4. Which of the following numbers is odd for every integer n?
A $2003n$ **B** $n^2 + 2003$ **C** n^3 **D** $n + 2004$ **E** $2n^2 + 2003$

J5. In a triangle ABC the angle C is three times bigger than the angle A, the angle B is two times bigger than the angle A. Then the triangle ABC
A is equilateral **B** is isosceles **C** has an obtuse angle **D** has a right angle
E has only acute angles

J6. Three singers take part in a musical round of 4 equal lines, each finishing after singing the round 3 times. The second singer begins the first line when the first singer begins the second line, the third singer begins the first line when the first singer begins the third line. The fraction of the total singing time that all three are singing at the same time is
A $\frac{3}{5}$ **B** $\frac{4}{5}$ **C** $\frac{4}{7}$ **D** $\frac{5}{7}$ **E** $\frac{7}{11}$

J7. The number $a = 111\ldots111$ consists of 2003 digits, each equal to 1. What is the sum of the digits of the product $2003 \cdot a$?
A 10 000 **B** 10 015 **C** 10 020 **D** 10 030 **E** 2003^2

J8. The area of the wooden square equals a. The area of each wooden circle equals b. Three circles are lined up as shown in the picture. If we tie together the three circles with a thread as short as possible, without moving them, what is the area inside the thread?



A $3b$ **B** $2a + b$ **C** $a + 2b$ **D** $3a$ **E** $a + b$

J9. How many of the functions $f(x) = 0$, $f(x) = \frac{1}{2}$, $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = -x$ satisfy the equation $f(x^2 + y^2) = f^2(x) + f^2(y)$?
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

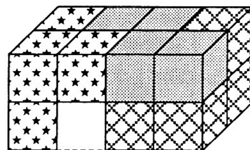
J10. In this addition each of the letters X, Y and Z represents a different non-zero digit. The letter X will then have to stand for
A 1 **B** 2 **C** 7 **D** 8 **E** 9

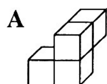
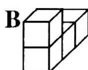
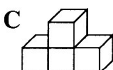
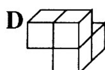
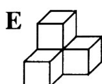
$$\begin{array}{r} XX \\ +\,YY \\ ZZ \\ \hline ZYX \end{array}$$

4-POINT QUESTIONS

J11. Ann has a box containing 9 pencils. At least one of them is blue. Among every 4 of the pencils at least two have the same colour, and among every 5 of the pencils at most three have the same colour. What is the number of blue pencils?
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 1 **E** Impossible to determine

J12. A rectangular parallelepiped was composed of 4 pieces, each consisting of 4 little cubes. Then one piece was removed (see picture). Which one?

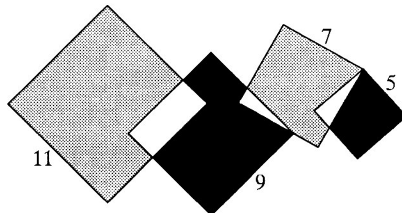


A  **B**  **C**  **D**  **E** 

J13. When a barrel is 30% empty it contains 30 litres more when it is 30% full. How many litres does the barrel hold when full?
A 60 **B** 75 **C** 90 **D** 100 **E** 120

J14. Each of two pupils changed two of the digits of 3-digit number 888 and got a new 3-digit number which is still divisible by 8. What is the biggest possible difference of their numbers?
A 800 **B** 840 **C** 856 **D** 864 **E** 904

J15. In the picture there are four overlapping squares with sides 11, 9, 7 and 5 long. How much greater is the sum of the two grey areas than the sum of the two black areas?
A 25 **B** 36 **C** 49 **D** 64 **E** 0

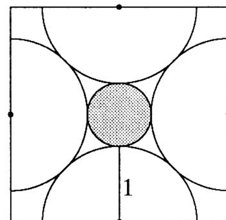


J16. The value of the product

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2003}\right)$$

is equal to
A 2004 **B** 2003 **C** 2002 **D** 1002 **E** 1001

J17. The diagram shows four semicircles with radius 1. The centres of the semicircles are at the mid-points of the sides of a square. What is the radius of the circle which touches all four semicircles?

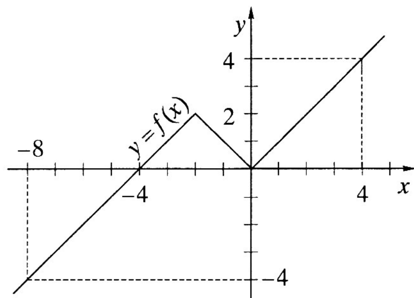


A $\sqrt{2}-1$ **B** $\frac{\pi}{2}-1$ **C** $\sqrt{3}-1$ **D** $\sqrt{5}-2$ **E** $\sqrt{7}-2$

J18. Consider all the different four-digit numbers that you can form by using the four digits of the number 2003. Summing up all them (including 2003 itself) you get:
A 5 005 **B** 5 555 **C** 16 665 **D** 1 110 **E** 15 555

J19. The first two terms of a sequence are 1 and 2. Each next term is obtained by dividing the term before the previous one by the previous term. What is the tenth term of this sequence?
A 2^{-10} **B** 256 **C** 2^{-13} **D** 1024 **E** 2^{34}

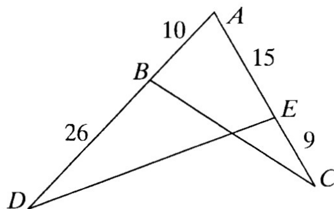
J20. The graph of the function $f(x)$, defined for all real numbers, is formed by two half-lines and one segment, as illustrated in the picture.



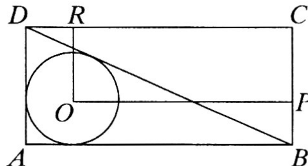
Clearly, −8 is a solution of the equation $f(f(x)) = 0$, because $f(f(-8)) = f(-4) = 0$. Find all the solutions of the equation $f(f(f(x))) = 0$.
A −4; 0 **B** −8; −4; 0 **C** −12; −8; −4; 0 **D** −16; −12; −8; −4; 0 **E** No solutions

5-POINT QUESTIONS

J21. What is the ratio of the areas of the triangles ADE and ABC in the picture?
A $\frac{9}{4}$ **B** $\frac{7}{3}$ **C** $\frac{4}{5}$ **D** $\frac{15}{10}$ **E** $\frac{26}{9}$

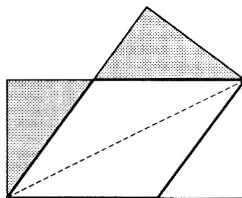


J22. The rectangle $ABCD$ has area 36. A circle with center in point O is inscribed in the triangle ABD. What is the area of the rectangle $OPCR$?
A 24 **B** 6π **C** 18 **D** $12\sqrt{2}$
E It depends on the ratio of the sides AB and AD



J23. The children K, L, M and N made the following assertions:
K: L, M and N are girls; L: K, M and N are boys;
M: K and L are lying; N: K, L and M are telling the truth.
How many of the children were telling the truth?
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** Impossible to determine

J24. A rectangular sheet of paper with measures 6×12 is folded along its diagonal. The shaded parts sticking out over the edge of the overlapping area are cut off and the sheet is unfolded. Now it has the shape of a rhombus. Find the length of the side of the rhombus.
A $\frac{7\sqrt{5}}{2}$ **B** 7.35 **C** 7.5 **D** 7.85 **E** 8.1



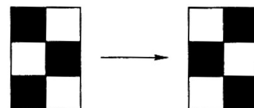
J25. How many distinct pairs $(x; y)$ satisfy the equation $(x + y)^2 = xy$?
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** Infinitely many

J26. What is the greatest number of consecutive integers such that the sum of the digits of none of them is divisible by 5?
A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 8 **E** 9

J27. On a bookshelf there are 50 math and physics books. No two physics books stand side by side, but every math book has a math neighbour. Which of the following statements *may turn out to be false*?
A The number of math books is at least 32
B The number of physics books is at most 17
C There are 3 math books standing in succession
D If the number of physics books is 17, then at least one of them is the first or the last on the bookshelf
E Among any 9 successive books, at least 6 are math books

J28. We take three different numbers from the numbers 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 and find their sum. How many different sums can we obtain?
A 13 **B** 21 **C** 22 **D** 30 **E** 120

J29. Unit squares of a squared board 2×3 are coloured black and white like a chessboard (see picture). Determine the minimum number of steps necessary to achieve the reverse of the left board, following the rule: in each step, we must repaint two unit squares that have a joint edge, but we must repaint a black square with green, a green square with white and a white square with black.



A 3 **B** 5 **C** 6 **D** 8 **E** 9

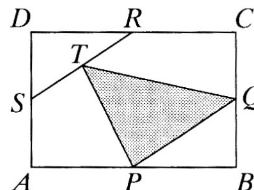
J30. We wrote down all the integers of 1 to 5 digits we could, using only the two digits 0 and 1. How many 1's did we write?
A 36 **B** 48 **C** 80 **D** 160 **E** 320

STUDENT (grades 11 and 12)

3-POINT QUESTIONS

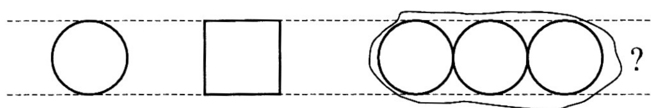
S1. Ann has a box containing 9 pencils. At least one of them is blue. Among every 4 of the pencils at least two have the same colour, and among every 5 of the pencils at most three have the same colour. What is the number of blue pencils?
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 1 **E** Impossible to determine

S2. In a rectangle $ABCD$, let P, Q, R and S be the midpoints of sides AB, BC, CD and AD, respectively, and let T be the midpoint of segment RS. Which fraction of the area of $ABCD$ does triangle PQT cover?



A $\frac{5}{16}$ **B** $\frac{1}{4}$ **C** $\frac{1}{5}$ **D** $\frac{1}{6}$ **E** $\frac{3}{8}$

S3. The area of the wooden square equals a. The area of each wooden circle equals b. Three circles are lined up as shown in the picture. If we tie together the three circles with a thread as short as possible, without moving them, what is the area inside the thread?



A $3b$ **B** $2a + b$ **C** $a + 2b$ **D** $3a$ **E** $a + b$

S4. Alan was calculating the volume of a sphere, but in the calculation he mistakenly used the value of the diameter instead of the radius of the sphere. What should he do with his result to get the correct answer?
A Divide it by 2 **B** Divide it by 4 **C** Multiply it by 6 **D** Divide it by 8
E Multiply it by 8

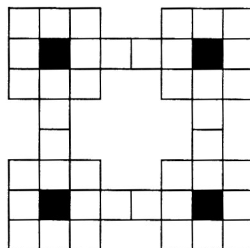
S5. If n is a positive integer, then $2^{n+2003} + 2^{n+2003}$ is equal to
A 2^{n+2004} **B** $2^{2n+4006}$ **C** $4^{2n+4006}$ **D** $4^{2n+2003}$ **E** 4^{n+2003}

S6. For which of the following settings does a triangle ABC exist?
A $AB = 11\,\text{cm}$, $BC = 19\,\text{cm}$, $CA = 7\,\text{cm}$
B $AB = 11\,\text{cm}$, $BC = 7\,\text{cm}$, $\angle BAC = 60^\circ$
C $AB = 11\,\text{cm}$, $CA = 7\,\text{cm}$, $\angle CBA = 128^\circ$
D $AB = 11\,\text{cm}$, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle CBA = 128^\circ$
E For none of them

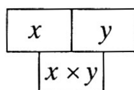
S7. The average number of students accepted by a school in the four years 1998–2001 was 325 students per year. The average number of students accepted by the school in the five years 1998–2002 is 20% higher. How many students did this school accept in 2002?
A 650 **B** 600 **C** 455 **D** 390 **E** 345

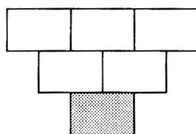
S8. Find all values of the parameter m for which the curves $x^2 + y^2 = 1$ and $y = x^2 + m$ have exactly one common point.
A $-\frac{5}{4}; -1; 1$ **B** $-\frac{5}{4}; 1$ **C** $-1; 1$ **D** $-\frac{5}{4}$ **E** 1

S9. The composite board shown in the picture consists of 44 fields 1×1. How many possibilities are there to cover all 40 white fields with 20 rectangular stones 1×2? (The board cannot be turned. Two possibilities are different if at least one stone lies in another way.)
A 8 **B** 16 **C** 32 **D** 64 **E** 100



S10. According to the rule given in the left picture below, we construct a numerical triangle with an integer number greater than 1 in each cell. Which of the numbers given in the answers cannot appear in the shaded cell?

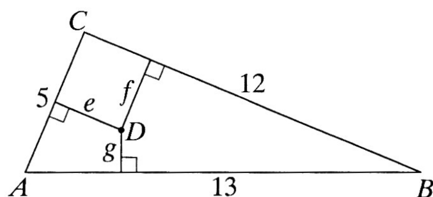




A 154 **B** 100 **C** 90 **D** 88 **E** 60

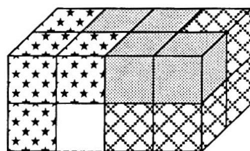
4-POINT QUESTIONS

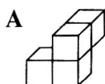
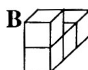
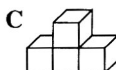
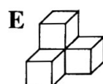
S11. Let ABC be a triangle with area 30. Let D be any point in its interior and let e, f and g denote the distances from D to the sides of the triangle.



What is the value of the expression $5e + 12f + 13g$?
A 120 **B** 90 **C** 60 **D** 30
E Impossible to find the value without knowing the exact location of D

S12. A rectangular parallelepiped was composed of 4 pieces, each consisting of 4 little cubes. Then one piece was removed (see picture). Which one?



A  **B**  **C**  **D**  **E** 

S13. Two white and eight gray seagulls were flying over a river. Suddenly, they all randomly sat down at the bank forming a line. What is the probability that the two white seagulls were sitting side by side?
A $\frac{1}{5}$ **B** $\frac{1}{6}$ **C** $\frac{1}{7}$ **D** $\frac{1}{8}$ **E** $\frac{1}{9}$

S14. The value of

$$\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+2002\sqrt{1+2003\cdot 2005}}}}$$

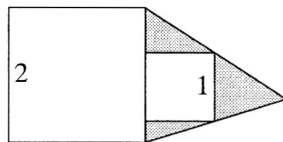
is equal to
A 2000 **B** 2001 **C** 2002 **D** 2003 **E** 2004

S15. Numbers 12, 13 and 15 are the lengths (perhaps not in order) of two sides of an acute-angled triangle and of the height over the third side of this triangle. Find the area of the triangle.
A 168 **B** 80 **C** 84 **D** $6\sqrt{65}$ **E** Impossible to find

S16. The sequence $1^7, 2^7, 3^7, \ldots$ is constructed of the seventh powers of all positive integers. How many terms of this sequence lie between the numbers 5^{21} and 2^{49}?
A 13 **B** 8 **C** 5 **D** 3 **E** 2

S17. We know that $10^n + 1$ is a multiple of 101, and n is a 2-digit number. What is the largest possible value of n?
A 92 **B** 94 **C** 96 **D** 98 **E** 99

S18. The diagram shows two squares: one has a side with a length of 2 and the other (abut on the first square) has a side with a length of 1. What is the area of the shaded zone?
A 1 **B** 2 **C** $2\sqrt{2}$ **D** 4
E It depends on the position of the smaller square

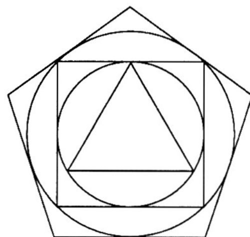


S19. How many of the functions $f(x) = 0$, $f(x) = \frac{1}{2}$, $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = -x$ satisfy the equation $f(x^2 + y^2) = f^2(x) + f^2(y)$?
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

S20. If $a^4 + \frac{1}{a^4} = 4$, then $a^6 + \frac{1}{a^6}$ is equal to
A $4\sqrt{6}$ **B** $3\sqrt{6}$ **C** 6 **D** $5\sqrt{6}$ **E** $6\sqrt{6}$

5-POINT QUESTIONS

S21. We first draw an equilateral triangle, then draw the circumcircle of this triangle, then circumscribe a square to this circle. After drawing another circumcircle, we circumscribe a regular pentagon to this circle, and so on. We repeat this construction with new circles and new regular polygons (each with one side more than the preceding one) until we draw a 16-sided regular polygon. How many disjoint regions are there inside the last polygon?
A 232 **B** 240 **C** 248 **D** 264 **E** 272



S22. A point $P(x; y)$ lies on a circle with center $M(2; 2)$ and radius r. We know that $y = r > 2$ and x, y and r are all positive integers. What is the smallest possible value of x?
A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 10

S23. The four positive integers A, B, $A - B$, $A + B$ are all prime. Then the sum of them
A is even **B** is a multiple of 3 **C** is a multiple of 5 **D** is a multiple of 7 **E** is prime

S24. A manager in a store has to determine the price of a sweater. Market research gives him the following information: If the price is \$75 then 100 teens will buy the sweaters. The price can be increased or decreased several times by units of \$5. Each time the price is increased by \$5, 20 fewer teens will buy the sweaters. However, each time the price is decreased by \$5, 20 sweaters more will be sold. The sweater costs the company \$30 apiece. What is the sale price that maximizes profits?
A 85 **B** 80 **C** 75 **D** 70 **E** 65

S25. How many distinct pairs $(x; y)$ satisfy the equation $(x + y)^2 = (x + 3)(y - 3)$?
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** Infinitely many

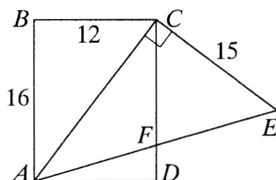
S26. A sequence $a_0, a_1, a_2, \ldots$ is defined in the following way:

$$a_0 = 4, \quad a_1 = 6, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \qquad (n \geqslant 1).$$

Then a_{2003} is equal to

A $\frac{3}{2}$ **B** $\frac{2}{3}$ **C** 4 **D** $\frac{1}{4}$ **E** $\frac{1}{6}$

S27. In the picture $ABCD$ is a rectangle with $AB = 16$, $BC = 12$. Let E be such a point that $AC \perp CE$, $CE = 15$.



If F is the point of intersection of segments AE and CD, then the area of the triangle ACF is equal to
A 75 **B** 80 **C** 96 **D** 72 **E** 48

S28. We can put an arrow on one end of the edge of a cube, defining a vector, and put an arrow on the other end of the edge, defining the opposite vector. We put an arrow on each edge and then add up all 12 vectors obtained. How many different values of sum of vectors can we obtain in this way?
A 25 **B** 27 **C** 64 **D** 100 **E** 125

S29. We are given the 6 vertices of a regular hexagon and all line segments joining any two of these points. We call two such segments *strangers* if they have no common point (including end points). How many pairs of strangers are there?
A 26 **B** 28 **C** 30 **D** 34 **E** 36

S30. Let f be a polynomial such that $f(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$. Determine $f(x^2 - 1)$.
A $x^4 - 4x^2$ **B** x^4 **C** $x^4 + 4x^2 - 4$ **D** $x^4 - 4$ **E** Another answer

Atsakymai • Ответы • Odpowiedzi • Answers

Klausimo Nr. Nr. pytania No. of question	Grupė Grupa Group				
	M	**B**	**K** (**C**)	**J**	**S**
1	C	C	E	C	B
2	D	B	C	B	B
3	B	A	D	A	C
4	C	C	C	E	D
5	C	B	D	D	A
6	C	A	B	D	E
7	B	D	B	B	A
8	A	A	D	C	E
9	C	C	E	C	B
10	D	B	C	D	A
11	C	C	A	B	C
12	C	C	C	C	C
13	A	B	C	B	A
14	D	E	E	C	B
15	A	B	D	D	C
16	D	B	D	D	E
17	B	A	C	A	D
18	E	B	D	E	A
19	A	B	C	E	C
20	E	D	C	C	B
21	D	A	D	A	C
22	D	C	B	C	C
23	B	B	B	B	E
24	B	D	D	C	E
25		D	C	B	B
26		C	B	D	B
27		D	E	C	A
28		B	A	C	E
29		D	B	C	C
30		B	B	C	D
	М	**Б**	**К**	**Ю**	**С**
№ вопроса	Группа				